

---

# Allocation de ressources par échanges bilatéraux

---

Anastasia Damamme

Aurélie Beynier

Nicolas Maudet

Laboratoire d'Informatique de Paris 6, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France

{anastasia.damamme,aurelie.beynier,nicolas.maudet}@lip6.fr

## Résumé

Dans cet article, nous étudions des procédures décentralisées d'allocation de ressources reposant sur des échanges bilatéraux entre les agents. Nous nous intéressons aux problèmes dans lesquels chaque agent possède une unique ressource et est en mesure d'échanger cette ressource avec un autre agent afin d'augmenter sa satisfaction, les préférences d'un agent étant décrites par un ordre linéaire sur les ressources. Différentes approches se sont précédemment proposées de calculer de manière centralisée une solution optimale au sens de Pareto. Notre propos est d'étudier les propriétés des solutions obtenues par des procédures décentralisées. Malgré le fait que dans le pire cas, ces solutions puissent potentiellement être loin de l'optimalité, nous avançons plusieurs arguments permettant de relativiser ces résultats négatifs. Nous comparons également les solutions résultant d'échanges bilatéraux avec celles obtenues par la procédure centralisée Top Trading Cycle.

## Abstract

In this paper, we investigate fully decentralized resource allocation procedures based on bilateral deals. We focus on problems in which each agent has a unique resource and is able to exchange this resource with another agent in order to increase its satisfaction. The preferences of an agent are assumed to be defined as a linear order on resources. Different approaches have been previously proposed to compute, in a centralized way, Pareto-optimal solutions. Our purpose is to study the properties of the solutions obtained using fully decentralized procedures. Despite worst-case situation showing a potentially important deficit of optimality, we put forward several arguments to defend this approach. We also compare solutions resulting from bilateral deals with those obtained by the centralized Top Trading Cycle procedure.

## 1 Introduction

L'allocation de ressources est un problème où l'on cherche à distribuer des ressources dans une société d'agents. Ce problème est très étudié dans le cadre de l'intelligence artificielle et de l'informatique en général [7, 10, 9, 6, 11]. Il en existe de nombreuses variantes. Nous nous intéressons à une version élémentaire mais fondamentale de ce problème dans laquelle il s'agit d'allouer *une* ressource indivisible unique à chaque agent, partant d'une situation initiale où les agents possèdent déjà une ressource. Le transfert d'utilité (via l'utilisation d'une monnaie) n'est pas permis, et les préférences des agents sont ordinales, plus précisément des ordres linéaires. Il s'agit d'un problème connu en économie sous le terme de *house allocation*, ou *house market* dans sa version décentralisée, où les agents débutent le processus avec une ressource en leur possession.

Les propriétés souhaitées pour l'allocation finale sont tout d'abord l'efficacité, au sens de Pareto. On peut vouloir être plus exigeant et souhaiter maximiser un critère comme le *rang moyen* des ressources obtenues. Notons qu'il s'agit dans ce cas-là d'appliquer une fonction d'utilité de type *Borda count* procurant  $n$  points pour la ressource préférée,  $n - 1$  pour la deuxième préférée, etc., puis de chercher à maximiser le bien-être social utilitaire (c'est cette notion que nous utiliserons plus volontiers dans cet article). On peut enfin, dans un soucis d'équité, chercher à maximiser le rang de la ressource de l'agent le moins satisfait (*maxmin*). Un autre critère d'équité classique est l'*envie*. Dans notre modèle, cette notion se décline de manière assez simple : une allocation est sans envie si tous les agents obtiennent leur ressource préférée, le nombre d'agents envieux est le nombre d'agents n'obtenant pas leur ressource favorite. Pour finir, il est utile de remarquer que la maximisation du rang moyen déjà évoquée minimise dans le même temps un degré d'en-

vie correspondant à la somme du nombre d'agents que chaque agent envie dans le système.

Il est à noter que les différents problèmes évoqués ici ne posent pas de difficultés algorithmiques majeures : en se basant sur des algorithmes d'appariement (*matching*), et en prenant soin de gérer correctement les ressources initialement allouées, il est possible de calculer une allocation maximale. De même, la procédure de Herreiner et Puppe [8] qui cherche une allocation réalisable (et Pareto optimale) en descendant progressivement dans les rangs des ressources souhaitées par les agents, retourne une allocation maxmin.

Une propriété souhaitable dans un cadre de réallocation est que l'allocation obtenue ne soit pas améliorable par une coalition d'agents. La procédure de *Top Trading Cycle* produit une allocation en partant d'une allocation initiale et garantit que l'allocation obtenue se situe dans le cœur (*core*), qui, de surcroît, est *unique* [13]. Depuis cette allocation initiale, c'est donc la seule allocation telle que aucune coalition d'agents ne pourrait dévier vers une autre allocation favorable à tous dans cette allocation. Il s'agit par ailleurs de la seule procédure permettant de conjuguer efficacité (au sens de Pareto), rationalité individuelle (le fait d'obtenir une ressource au moins aussi bonne que celle détenue initialement), et résistance aux comportements stratégiques (aucun agent n'ayant intérêt à annoncer des préférences différentes des siennes).

Notre propos, dans cet article, sera d'étudier une approche décentralisée du problème, dans laquelle les échanges permis entre les agents ne sont que *bilatéraux*. Il a déjà observé (et il n'est pas surprenant) que cette limitation drastique dans la complexité des échanges peut entraîner un déficit d'optimalité important, puisque le prix de l'anarchie de cette procédure décentralisée peut être  $\simeq \frac{1}{2}$  [5].

Dans cet article nous tentons dans une certaine mesure de réhabiliter la pertinence de cette procédure simple. Nous nous arrêtons d'abord sur une instance particulière qui permet d'exhiber le "prix de l'anarchie", et nous l'utilisons pour illustrer que même pour cette instance la réalisation de ce prix de l'anarchie est improbable (Section 3). Il ne s'agit pas de la seule instance permettant d'illustrer ce déficit d'optimalité, mais cela souligne le caractère "pire cas" de cette notion. Nous avançons ensuite que : (1) que de manière générale les résultats obtenus sont satisfaisants et équilibrés (Section 4), et que (2) sous certaines restrictions de domaines il est possible de produire des garanties sur l'efficacité de l'allocation trouvée (Section 5).

## 2 Allocation de ressources

Soit un ensemble d'agents  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$  et un ensemble de ressources indivisibles  $\mathcal{R} = \{r_1, \dots, r_n\}$ . Une *allocation*  $A$  est une fonction de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{R}$  qui associe à chaque agent une ressource. Soit  $a_i \in \mathcal{A}$  et  $r_j \in \mathcal{R}$ ,  $A(a_i) = r_j$  signifie que la ressource  $r_j$  est allouée à l'agent  $a_i$ . Notons bien que  $|\mathcal{A}| = |\mathcal{R}|$ . Nous supposons également que chaque ressource n'est présente qu'en un seul exemplaire. Ainsi,  $\forall a_i, a_k \in \mathcal{A}$ , si  $a_i \neq a_k$ , alors  $A(a_i) \neq A(a_k)$ . De plus,  $\{A(a_i) | \forall a_i \in \mathcal{A}\} = \mathcal{R}$ . L'ensemble des allocations réalisables est noté  $A_{\mathcal{R}}$ . Enfin, nous supposons que les ressources sont initialement réparties sur les agents à raison d'une ressource par agent.

Chaque agent exprime ses préférences sous forme d'un ordre complet sur les ressources. Cet ordre peut être exprimé sous forme d'une fonction d'utilité où l'utilité de la ressource la plus préférée est  $n$ , l'utilité de la deuxième préférée est  $n - 1$ ,  $\dots$ , l'utilité de la ressource la moins préférée est 1. Les agents sont supposés rationnels, c'est-à-dire qu'ils cherchent à obtenir une ressource dont l'utilité est la meilleure pour eux.

Par la suite, nous parlerons d'une *instance* d'un problème d'allocation de ressources pour désigner le quadruplet : ensemble d'agents  $\mathcal{A}$ , ensemble de ressources  $\mathcal{R}$ , fonctions d'utilité  $u_i, i \in [1, n]$  traduisant les préférences, et une allocation initiale. On note  $\mathcal{I}$  l'ensemble des instances de ce problème.

**Qualité des allocations.** Il existe plusieurs moyens d'évaluer l'efficacité d'une allocation. La première consiste à considérer la classe d'allocations où aucun joueur ne peut améliorer son utilité au détriment des autres.

**Définition 1.** Une allocation Pareto-optimale est une allocation  $A_p$  pour laquelle il n'existe pas d'autre allocation  $A'$  telle que :

$$\begin{aligned} \forall a_i \in \mathcal{A}, u_i(A'(a_i)) &\geq u_i(A_p(a_i)) \text{ et} \\ \exists a_j \in \mathcal{A}, u_j(A'(a_j)) &> u_j(A_p(a_j)) \end{aligned}$$

L'utilité d'une allocation peut également être mesurée à l'aide du bien-être social. Les deux mesures de bien-être social les plus couramment utilisées sont le bien-être social utilitaire et le bien-être social égalitaire. Le bien-être social utilitaire, qui correspond à la somme des utilités des agents

$$sw_u(A) = \sum_i u_i(A(a_i))$$

et le bien-être social égalitaire qui correspond à l'utilité du joueur le moins satisfait :

$$sw_e(A) = \min(u_i(A(a_i)))$$

La notion d'envie est par ailleurs un critère classique pour évaluer l'équité d'une allocation. Elle se base sur le fait qu'un joueur puisse préférer la ressource d'un autre joueur à sa propre ressource.

**Définition 2.** *Un agent  $a_i$  est dit envieux si et seulement si,*

$$\exists a_j \in \mathcal{A}, \text{ tel que } u_i(A(a_j)) > u_i(A(a_i))$$

*Un système est sans envie s'il n'existe pas d'agent envieux.*

Cette mesure présente l'intérêt d'être indépendante de la manière dont les joueurs évaluent leurs ressources. Il est à noter qu'il n'existe pas toujours d'allocation sans envie. Il suffit pour cela que deux joueurs préfèrent la même ressource. Dans notre cas, cela signifie qu'un joueur est envieux s'il ne possède pas sa meilleure ressource. Comme nous l'avons déjà mentionné, minimiser la somme du nombre d'agents que l'on envie dans le système correspond à maximiser le rang moyen, donc le  $sw_u$  lorsque les préférences sont "cardinalisées" à l'aide de la fonction de type Borda.

**Top trading Cycle.** Introduite initialement par [13], dans le cadre des *house market*, le *Top Trading Cycle* est une procédure d'échanges multiagents, sans argent se basant sur un graphe bipartite.

Soit le graphe orienté bipartite  $G = (E, V)$ . Initialement,  $E = \{\mathcal{A} \cup \mathcal{R}\}$ , autrement dit, on a un nœud pour chaque agent et chaque ressource. Le nombre de nœuds diminuera au fur et à mesure de la procédure. Pour chaque agent, on a un arc sortant vers la ressource qu'il préfère parmi celles restantes. Et pour chaque ressource, on a un arc sortant vers l'agent qui la possède.

On peut garantir d'existence d'au moins un cycle (au pire entre un seul agent et la ressource qu'il possède). On choisit un cycle (n'importe lequel) parmi ceux existant dans  $G$ . Si la taille du cycle est supérieur à 2, on procède à un échange entre les agents de telle manière à ce que chaque agent du cycle récupère sa ressource préférée. Puis, quelque soit la taille du cycle, on le retire du graphe, et on reconstruit ce dernier. La procédure s'arrête quand  $G$  est vide. L'allocation résultante est Pareto-optimale et unique (quelque que soit l'ordre dans lesquels les cycles sont choisis).

**Procédure d'échanges bilatéraux.** Si la procédure TTC possède d'excellentes propriétés, elle n'est pas nécessairement facile à mettre en pratique dans un cadre purement décentralisé (puisqu'elle requiert l'élicitation complète des préférences, le calcul du résultat par un agent, puis la mise en place d'échanges

potentiellement très complexes, devant être synchronisés). Dans cet article, nous étudions une procédure plus simple, notée *BL* : les agents peuvent échanger leurs ressources afin d'accroître leur satisfaction mais seulement à l'aide d'échanges *bilatéraux* consistant en l'échange entre 2 agents des ressources qu'ils possèdent. Cet échange est réalisé sans compensation monétaire. Dans ce contexte, deux agents  $a_i$  et  $a_k$  détenant respectivement les ressources  $r_j$  et  $r_l$  vont échanger leurs ressources si l'agent  $a_i$  (respectivement l'agent  $a_k$ ) préfère la ressource  $r_l$  (resp.  $r_j$ ) à la ressource  $r_j$  (resp.  $r_k$ ) qu'il possède.

**Stabilité.** Dans une allocation stable, plus aucun échange bilatéral rationnel n'est possible. Plus formellement :

**Définition 3.** *Une allocation stable est une allocation  $A_s$  où  $\forall (a_i, a_j) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}, a_i \neq a_j$  :*

$$u_i(A_s(a_i)) > u_i(A_s(a_j)) \text{ ou } u_j(A_s(a_j)) > u_j(A_s(a_i))$$

On utilisera la notation  $A_{\rightarrow}$  pour désigner, en partant de  $A$ , après applications des échanges bilatéraux, l'allocation de sortie (et donc stable). On note  $A_s$  l'ensemble des allocations stables.

La procédure se résume alors ainsi. Tant que l'allocation n'est pas stable, on effectue un échange choisi parmi les échanges rationnels bilatéraux possibles. La procédure s'arrête quand l'allocation devient stable. Evidemment, la manière dont on choisit les échanges à réaliser peuvent affecter le résultat obtenu. Dans les résultats expérimentaux de cet article, le choix s'effectue de manière équiprobable entre les échanges possibles, ce qui est l'hypothèse la plus simple pour débiter.

**Prix de l'anarchie.** Un critère permettant d'évaluer une procédure décentralisée reposant sur la rationalité individuelle consiste à calculer le prix d'anarchie : il s'agit de comparer le bien-être social utilitaire de la pire allocation  $A_{wu}$  qu'on peut obtenir en appliquant des échanges bilatéraux aléatoires avec l'allocation optimale  $A_{ou}$  en termes de bien-être social utilitaire. Le prix d'anarchie est alors défini par le ratio maximum

$$PoA(BL) = \frac{\min_{A \in A_s} sw_u(A)}{\max_{A \in A_r} sw_u(A)}$$

qu'il est possible de trouver parmi les instances de  $\mathcal{I}$ .

Dans le problème qui nous concerne, il a été observé [5] que le  $PoA(BL)$  est  $\simeq \frac{1}{2}$ . Cela peut être montré de la manière suivante : pour une allocation stable  $A \in A_s$ , on a nécessairement  $sw_u(A) \geq \frac{n(n+1)}{2}$ . En effet, pour qu'une allocation soit stable, il faut que pour chaque paire d'agent considérée, au moins un agent

place la ressource détenue par l'autre agent derrière sa ressource dans son ordre de préférence. Comme on a  $\frac{n(n-1)}{2}$  paires d'agents, on en déduit l'inégalité.

Partant de là, une instance exhiberait le plus grand écart possible ( $\simeq \frac{1}{2}$ ) entre le bien-être social utilitaire s'il était possible d'avoir une allocation stable avec  $sw_u(A) = \frac{n(n+1)}{2}$  tandis qu'il existe une allocation optimale  $A'$  avec  $sw_u(A') = n^2$ . C'est le cas, et cela peut être montré sur une instance particulière dans laquelle les préférences des agents sont définies par permutation circulaire. Considérons 3 agents numérotés de 1 à 3 et 3 ressources  $\{a, b, c\}$ . L'ensemble des préférences suivant définit des préférences circulaires :

$$\begin{array}{l} 1 : a \succ b \succ c \\ 2 : b \succ c \succ a \\ 3 : c \succ a \succ b \end{array}$$

L'allocation où tout le monde possède sa deuxième ressource est stable, mais l'allocation où tout le monde possède sa meilleure ressource est réalisable.

**Exemple d'exécution des procédures.** Soit une instance avec  $n = 5$ ,  $\mathcal{A} = \{1, \dots, 5\}$ ,  $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}$ . Les préférences des agents sont les suivantes. L'allocation initiale est donnée par les ressources indiquée en gras.

$$\begin{array}{l} 1 : r_1 \succ r_3 \succ r_2 \succ r_4 \succ \mathbf{r_5} \\ 2 : \mathbf{r_2} \succ r_1 \succ r_3 \succ r_4 \succ r_5 \\ 3 : \mathbf{r_1} \succ r_5 \succ r_2 \succ r_3 \succ r_4 \\ 4 : r_3 \succ r_5 \succ r_2 \succ r_1 \succ \mathbf{r_4} \\ 5 : r_4 \succ r_5 \succ r_2 \succ \mathbf{r_3} \succ r_1 \end{array}$$

On peut noter qu'il n'y a pas d'allocation sans envie (il faudrait que 1 et 3 aient la même ressource).

Nous allons d'abord voir l'exécution du *Top Trading Cycle*. À partir de la situation initiale, nous avons le graphe de la figure 1.

Il y a 3 cycles.  $\{4, r_3, 5, r_4\}$ ,  $\{2, r_2\}$ ,  $\{3, r_1\}$ . On va prendre le premier. On effectue l'échange entre 4 et 5 et on retire le cycle du graphe. On reconstruisant le graphe, il y a encore les cycles  $\{2, r_2\}$ ,  $\{3, r_1\}$ . On prend le premier et on retire du graphe. En construisant le graphe, nous avons toujours le deuxième, qu'on retire. En reconstruisant le graphe, il ne reste plus que 1 et  $e$  qui forme un cycle. On le retire. Le graphe est vide. La procédure est terminée.

Nous nous intéressons maintenant à la procédure d'échanges bilatéraux. De l'allocation initiale, il y a 3 échanges possibles. Entre 1 et 4 (*i*), entre 1 et 5 (*ii*), et entre 4 et 5 (*iii*). L'échange (*iii*) est le même que pour la procédure *Top Trading Cycle* et nous mènera à la même situation finale. (Note : La procédure *Top Trading Cycle* autorisant les échanges avec plus de deux

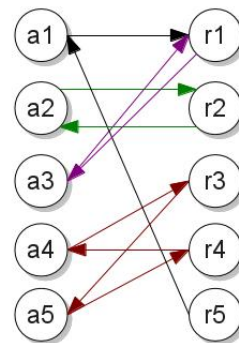


FIGURE 1 – Graphe de l'algorithme Top Trading Cycle à partir de l'allocation initiale de l'exemple. Il y a 3 cycles, représentés en vert, rouge et violet.

agents, il arrive souvent qu'il ne puisse être reproduit avec les échanges bilatéraux, bien que ce soit le cas ici). Si nous effectuons l'échange (*i*), il ne resterait possible qu'un échange entre 1 et 5, qui mènerait à une allocation stable. Si nous effectuons l'échange (*ii*), il ne resterait que qu'un échange possible entre 4 et 5, qui mènerait à une allocation stable (la même que la précédente). Les allocations finales sont résumées dans la table suivante :

Échanges	1	2	3	4	5	$sw_u$	$sw_e$
( <i>i</i> )	$r_3$	$r_2$	$r_1$	$r_5$	$r_4$	23	4
( <i>ii</i> )	$r_3$	$r_2$	$r_1$	$r_5$	$r_4$	23	4
( <i>iii</i> )-TTC	$r_5$	$r_2$	$r_1$	$r_3$	$r_4$	21	1

On voit aussi que le résultat de TTC est sous-optimal pour le bien-être social utilitaire et égalitaire. En guise d'échauffement, nous allons à présent nous concentrer sur ces instances à "préférences circulaires". Ces préférences ne sont pas particulièrement naturelles, mais cela sera surtout pour nous l'occasion de mettre en avant des aspects méthodologiques de notre travail.

### 3 Zoom sur les préférences circulaires

#### 3.1 Présentation de l'instance

Dans cette section, nous nous intéressons aux préférences dites "circulaires", c'est-à-dire aux ensembles de préférences tels que l'ordre des préférences sur les ressources d'un agent  $a_n$  correspond à un décalage d'un élément de l'ordre des préférences de l'agent  $a_{n-1}$ . Sans perte de généralité, nous nous intéresserons par la suite aux décalages vers la gauche.

Plus formellement :

**Définition 4.** *Un ensemble de préférences est dit circulaire si et seulement si :*

$$\forall a_i \in \mathcal{A}, j \in \mathcal{R}, u_i(j) = (j + i \pmod n) + 1$$

L'allocation où chaque joueur possède sa ressource de rang  $\frac{n+1}{2}$  sera appelée allocation *intermédiaire*. Notons que cette allocation est stable.

Le résultat sur le prix de l'anarchie suggère que cette instance est très désavantageuse. Pourtant, il faut garder à l'esprit que cette notion reste une notion de "pire des cas". Commençons par deux observations :

**Observation 1.** *Aucune suite d'échanges bilatéraux ne mène à l'allocation intermédiaire.*

La preuve, omise, consiste à observer la stabilité "symétrique" de cette allocation.

La deuxième observation que nous pouvons faire concerne le bien-être utilitaire de l'allocation intermédiaire.

**Observation 2.** *L'allocation intermédiaire est la seule allocation stable dont le bien-être sociale utilitaire est égal à  $\frac{n(n+1)}{2}$ .*

*Démonstration.* Nous cherchons à montrer qu'à part l'allocation intermédiaire, aucune allocation ayant le même bien-être social utilitaire ( $\frac{n(n+1)}{2}$ ) n'est stable. Pour ce faire, nous allons montrer que si un joueur possède une ressource dont l'utilité est inférieure à  $\frac{n+1}{2}$ , alors pour pouvoir construire une allocation stable, nous devrions avoir un bien-être social supérieur à  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

Si une autre allocation a le même bien-être utilitaire que l'allocation intermédiaire alors, il existe un joueur  $a_f$  qui a, au mieux sa  $\frac{(n+3)}{2}$ -ème meilleure ressource  $r_p$ . Il existe donc  $\frac{(n+1)}{2}$  ressources qu'il préfère et contre lesquelles il est prêt à échanger sa ressource. Soit  $\mathcal{A}^m$  l'ensemble des joueurs possédant une ressource qui intéresse  $a_f$ . Pour que l'allocation soit stable, il faut que les joueurs  $a_i^m \in \mathcal{A}^m$  ne soient pas intéressés par  $r_p$ .

Il reste  $\frac{(n-3)}{2}$  joueurs. Ces joueurs vont choisir les ressources qui n'intéressent pas  $a_f$ . Il n'y a pas de contrainte sur la répartition des ressources entre les joueurs.

Nous pouvons donc évaluer le bien-être utilitaire par rapport à l'utilité que les joueurs accordent à  $r_p$ . À la base, ce bien-être utilitaire s'élève à  $1 + 2 + \dots + n$  soit  $\frac{n(n+1)}{2}$ . À cette valeur, nous ajoutons  $1 + 2 + \dots + i$  où  $i$  est le nombre de joueurs possédant une ressource intéressant  $a_f$  et dont les utilités qu'ils leurs accordent doivent être supérieures à celle accordée à  $r_p$ . Nous devons également retrancher  $1 + 2 + \dots + j$  où  $j$  est le

nombre de joueurs possédant une ressource n'intéressant pas  $a_f$  et dont l'utilité peut être inférieure à celle accordée à  $r_p$ . Si l'utilité de  $a_f$  égale  $\frac{n-1}{2}$ , nous avons donc  $i = \frac{n-3}{2}$  et  $j = \frac{n+1}{2}$ , soit  $i - j = n > 0$ . Si l'utilité de  $a_f$  est inférieure à  $\frac{n-1}{2}$ , la valeur de  $i$  augmentera et celle de  $j$  diminuera, ce qui augmentera encore plus le bien-être social nécessaire à la stabilité.  $\square$

Ainsi, l'observation 1 et l'observation 2 nous indiquent que la seule possibilité d'observer le déficit d'optimalité indiqué par le prix de l'anarchie est que l'allocation initiale soit *initialement* l'allocation intermédiaire.

Aussi, en supposant que l'allocation initiale est choisie aléatoirement (avec une probabilité uniforme parmi toutes les allocations), nous pouvons en déduire que la probabilité d'observer ce prix de l'anarchie est seulement de  $\frac{1}{n!}$ .

Pour autant, il est possible que le bien-être social soit très faiblement supérieur à  $\frac{n(n+1)}{2}$ , ce qui relativise la portée de l'observation précédente : il faut donc s'intéresser de plus près à la qualité des allocations stables obtenues.

Dans le cas des allocations à préférences circulaires, la structure de l'instance peut être mise à profit pour établir un premier résultat en ce sens.

**Observation 3.** *Pour toute allocation  $A$ , le bien être social utilitaire  $sw_u(A)$  est un multiple de  $n$ .*

*Démonstration.* Soit  $A(a_i)$  la ressource possédée par l'agent  $a_i$  dans l'allocation  $A$ . Sans perte de généralité, nous considérons l'agent  $a_0$  comme l'agent de référence. L'agent  $a_0$  reçoit  $A(a_0)$  et a l'utilité  $u_0(A(a_0))$ . L'agent  $a_1$  obtient  $A(a_1)$ , et ainsi de suite. On constate que :

$$u_1(A(a_1)) = (u_0(A(a_1)) + 1) \pmod n$$

$$u_2(A(a_2)) = (u_0(A(a_2)) + 2) \pmod n$$

...

Ainsi, nous déduisons :

$$sw_u(A) = \sum_i u_i(A(a_i)) = \sum_i [(u_0(A(a_i)) + i) \pmod n]$$

Par les règles de congruence, nous savons que :

$$\begin{aligned} & \sum_i [(u_0(A(a_i)) + i) \pmod n] \\ \equiv & \sum_i [(u_0(A(a_i)) + i) \pmod n] \\ \equiv & \left( \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \pmod n \\ \equiv & n(n+1) \pmod n \\ \equiv & 0 \end{aligned}$$

Donc,

$$\sum_i [(u_0(A(a_i)) + i) \pmod n] \equiv 0 \quad \square$$

Nous pouvons en déduire la propriété suivante

**Propriété 1.** *Lorsque  $n$  est impaire, et que l'allocation initiale n'est pas l'allocation intermédiaire, nous déduisons  $sw(A_{\rightarrow}) \geq \frac{n(n+3)}{2}$ .*

Ainsi, sans analyser de scénario particulier, nous pouvons d'ores et déjà conclure que l'espérance du bien-être social utilitaire est telle que :

$$E(sw(A_{\rightarrow})) \geq \frac{1}{n!} \times \frac{n(n+1)}{2} + (n-1)! \times \frac{n(n+3)}{2}$$

Pour aller plus loin, il faut être capable d'analyser le détail des séquences d'échanges bilatéraux. C'est un travail très laborieux qui devient vite in-envisageable, même sur de petites instances. Nous avons initié ce travail en utilisant PRISM<sup>1</sup>, un *model checker* probabiliste.

#### Calcul des probabilités d'atteintes des allocations.

PRISM permet de tester un modèle et de vérifier des propriétés de manière exhaustive. Pour cela, PRISM construit un automate basé sur le modèle, puis il l'explore pour vérifier une propriété (sa probabilité, son existence ou sa systématisation). Ses avantages sont sa capacité à proposer une vérification formelle (en plus d'éventuelles simulations) de propriétés dans un modèle. Les limites de PRISM sont liées à sa syntaxe particulière (nécessaire pour la construction des automates) ne permettant pas l'implémentation de modèles trop complexes, ainsi que le fait qu'il ne permet pas de passer à l'échelle, concernant la vérification formelle (dans le meilleur des cas, nous n'avons pas réussi à dépasser un problème de taille 8), bien qu'une simulation reste possible.

Livrons nous à un petit exercice permettant d'illustrer les calculs possibles : considérons un problème d'allocation à 5 ressources et 5 agents avec les préférences circulaires décrites en Section 3.1. Nous rappelons que dans ce cas l'allocation optimale a pour somme des utilités, la valeur 25. Est-il préférable de partir d'une situation où tous les agents possèdent leur ressource la moins préférée (allocation  $A_1$ ), ou d'une allocation où chaque agent possède sa deuxième ressource préférée (allocation  $A_2$ ) ? Nous avons ainsi calculé, à l'aide de PRISM, les probabilités d'atteindre différentes valeurs pour la somme des utilités des

agents. Les probabilités calculées par PRISM (en supposant donc chaque échange bilatéral possible comme ayant la même possibilité d'être implémenté) nous indique que  $P(sw(A_{1\rightarrow}) = 20) = 40\%$  et  $P(sw(A_{1\rightarrow}) = 25) = 60\%$ , tandis que  $P(sw(A_{2\rightarrow}) = 20) = 100\%$  et  $P(sw(A_{1\rightarrow}) = 25) = 0\%$ . Dans l'instance considérée, aucune séquence ne permet donc d'atteindre l'allocation optimale à partir de  $A_2$ , tandis qu'en partant de  $A_1$  il existe plus d'une chance sur deux de l'atteindre. Ces résultats illustrent bien le fait que la qualité de la solution stable atteinte dépend fortement de la situation initiale considérée.

Évidemment, cette analyse exhaustive des possibilités offertes par un scénario n'est pas réalisable à large échelle, et ne permet pas de tirer des conclusions générales sur ce type d'approche. Dans la section qui suit, nous nous intéressons donc aux performances de la procédure d'échanges bilatéraux aléatoires en moyenne, sur un domaine classique.

## 4 Culture impartiale

Dans cette section nous avons procédé à une approche de type Monte-Carlo, en procédant à de nombreux tirages sur les scénarios que nous allons décrire. Nous supposons ici que les préférences des agents sont tirées de manière aléatoire uniforme par les  $n!$  ordres linéaires possibles. Ce type de tirage est connu sous le nom de culture impartiale.

**Répartition des allocations stables.** Une première question que nous nous sommes posée concerne la qualité moyenne des allocations stables dans la culture impartiale. Pour ce faire, nous nous sommes proposés de répéter 100 fois l'expérience suivante :

1. Une instance est tirée aléatoirement, c'est-à-dire en déterminant les préférences de chaque joueur de manière aléatoire et équiprobable (*culture impartiale*).
2. Toutes les allocations stables pouvant être obtenues sont calculées et le bien-être utilitaire de ces allocations est évalué.

Nous avons utilisé un solveur pour déterminer toutes les allocations réalisables et stables (en reprenant la formulation de la définition 3) pour une instance aléatoire (générée de la même manière que précédemment). Dans la pratique, nous avons utilisé un solveur programmé en JAVA, Choco 2<sup>2</sup>. Nous avons ainsi représenté, pour chaque instance, le nombre d'allocations stables pour chaque valeur de bien-être utilitaire (allant du bien être utilitaire au pire cas correspondant

1. <http://www.prismmodelchecker.org/>

2. <http://www.emn.fr/z-info/choco-solver/>

au prix de l’anarchie jusqu’au bien-être utilitaire maximum). Bien que nous n’ayons pu réaliser les tests pour des allocations de grande taille, les résultats obtenus sur les instances testées ont tous mis en évidence des répartitions ayant la forme d’une courbe de Gauss. La figure 2 présente un histogramme typique obtenu.

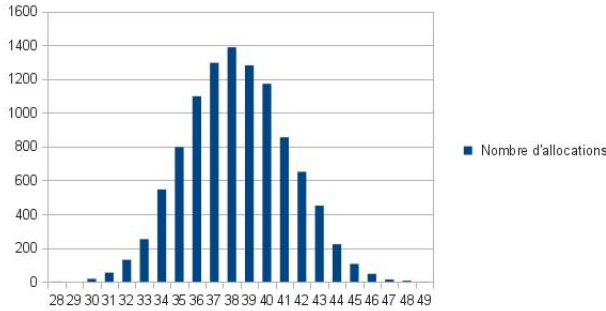


FIGURE 2 – Répartition du bien-être social des allocations stables pour 100 instances,  $n = 7$ .

Il est intéressant de noter que cette répartition semble rester valable même sur d’autres types d’instances : nous avons mené des expériences préliminaires sur différentes instances mises à disposition dans la librairie PrefLib (domaines des “tee-shirts” et “sushis”) et n’avons pas constaté de variation de répartition. Ces résultats restent toutefois à confirmer sur un plus grand nombre d’expériences.

**Efficacité des échanges bilatéraux.** Concernant à présent la procédure d’échanges bilatéraux, la première question que nous nous sommes posée est de savoir quelle est la proportion d’allocations finales Pareto-optimales. Pour ce faire, nous nous sommes proposés de répéter 10 000 fois l’expérience suivante :

1. Une instance est tirée aléatoirement, c’est-à-dire en déterminant les préférences de chaque joueur de manière aléatoire et équiprobable (*culture imparziale*) ;
2. Une allocation initiale est également tirée de manière aléatoire et équiprobable et l’algorithme d’échanges bilatéraux est appliqué jusqu’à une allocation finale stable ;
3. La Pareto-optimalité de l’allocation finale est testée.

Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 3. Nous pouvons constater (sans surprise) que plus  $n$  est grand, moins nous avons de chance que l’allocation finale soit Pareto-optimale. De plus, il est intéressant de constater que cette probabilité évolue de manière

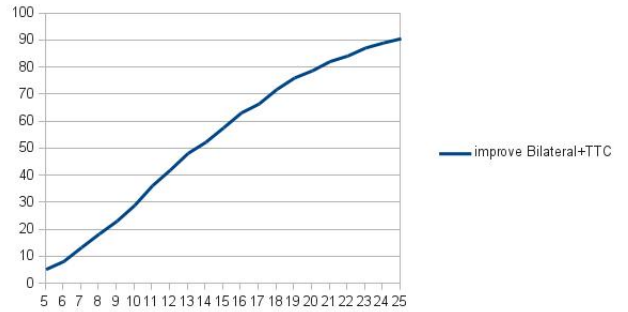


FIGURE 3 – Pourcentage d’allocations finales après la procédure d’échanges bilatéraux qui ne sont pas Pareto-optimales.

linéaire avec  $n$ . Ainsi pour  $n = 14$ , les échanges bilatéraux convergent encore dans 50% des cas vers une solution Pareto-optimale.

**Top-trading cycle vs. échanges bilatéraux** Pour finir, nous avons également souhaité comparer les allocations finales obtenues par échanges bilatéraux et en utilisant l’algorithme Top-Trading Cycle. Pour ce faire, nous avons répété 10 000 fois l’expérience suivante :

1. Une instance est tirée aléatoirement, c’est-à-dire en déterminant les préférences de chaque joueur de manière aléatoire et équiprobable (*culture imparziale*) ;
2. Une allocation initiale est également déterminée de manière aléatoire et équiprobable. Puis, l’algorithme d’échanges bilatéraux est appliqué 10 fois jusqu’à obtention d’une allocation finale. A partir de ces tests, nous calculons les bien-être utilitaires et égalitaires moyens ;
3. A partir de la même allocation initiale, l’algorithme Top-Trading Cycle est appliqué, et le bien-être utilitaire et égalitaire de l’allocation obtenue sont calculés (rappelons que cet algorithme donne une allocation unique) ;
4. Enfin une combinaison des deux est expérimentée, en appliquant Top-Trading Cycle aux allocations finales obtenues par échanges.

La figure 4 présente les résultats obtenus en termes de bien-être utilitaire. La figure 5 présente les résultats obtenus en termes de bien-être égalitaire.

Nous constatons que la procédure Top Trading Cycle conduit à de meilleurs résultats en termes bien-être utilitaire que les échanges bilatéraux. Cela peut facilement s’expliquer par le fait que les échanges bilatéraux ne garantissent pas que la solution soit Pareto-optimale. Par contre, un meilleur bien-être égalitaire

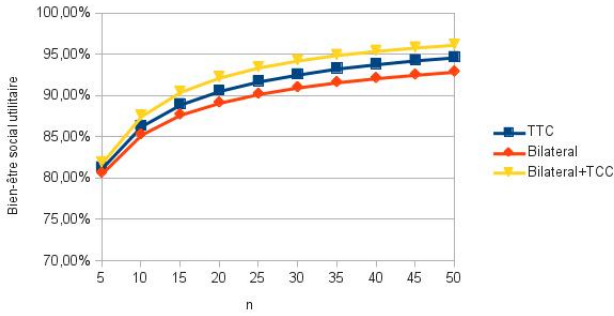


FIGURE 4 – Pourcentage du bien-être utilitaire sur le maximum des allocations finales.

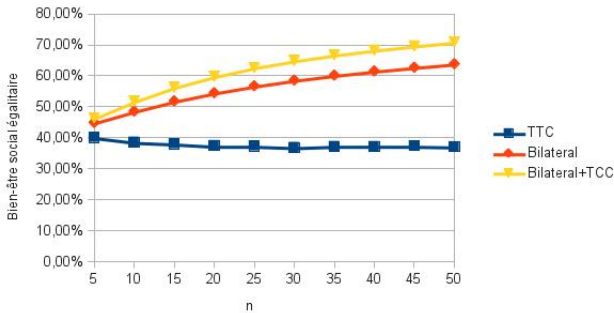


FIGURE 5 – Pourcentage du bien-être égalitaire sur le maximum des allocations finales.

est obtenu avec les échanges bilatéraux qu’avec le Top Trading Cycle. La raison est que ce dernier algorithme cherche des échanges qui maximisent l’utilité des joueurs parmi ceux possibles avec les ressources restantes. Cette procédure peut ainsi laisser de côté un joueur avec de mauvaises ressources. Au contraire, les échanges bilatéraux ne maximisent pas nécessairement l’utilité. Ainsi, un joueur peut échanger plusieurs fois. Il y a donc moins de chance qu’un joueur n’échange pas sa ressource et qu’il garde une mauvaise ressource.

D’ailleurs, on constate qu’en effectuant des échanges bilatéraux avant d’appliquer l’algorithme du Top Trading Cycle, les résultats sont toujours améliorés.

## 5 Instances Single Peaked

Nous allons maintenant nous intéresser à une autre famille de préférences, une restriction du domaine classique en choix social : les préférences *single peaked* [3, 4, 1]. Ce sont des préférences où il existe un ordre sur les ressources commun à tous les joueurs et où les préférences sont classées en fonction de cet ordre. Formellement, un ordre de préférence  $r_1 \succ r_2 \succ \dots \succ r_n$  est

défini. Chaque joueur  $a_i$  possède une ressource idéale  $r^*_i$ , qui sera sa ressource préférée. Les préférences pour ses autres ressources sont telles que si  $r^*_i \geq r_j \succ r_k$  alors  $r_j \prec_{a_i} r_k$  et si  $r_k \succ r_j \geq r^*_i$  alors  $r_j \prec_{a_i} r_k$ .

Ce type de préférences est très répandu en vote, puisqu’en politique les partis politiques ou candidats à une élection sont représentés naturellement sur un axe gauche-droite. Dans le domaine de l’allocation de ressources, cette restriction de domaine est moins courante mais elle n’en est pas moins naturelle dans divers domaines (comme des problèmes de localisation).

**Répartition des allocations.** Nous avons de nouveau étudié la répartition des allocations stables en générant cette fois-ci des instances avec des préférences Single Peaked. Cette fois, l’allure de courbes de Gauss est moins marquée puisque la fréquence d’allocation semble augmenter de manière linéaire jusqu’à, qui constitue le bien-être social utilitaire le plus fréquent. De plus, le bien-être social utilitaire moyen est plus élevé —voir figure 6.

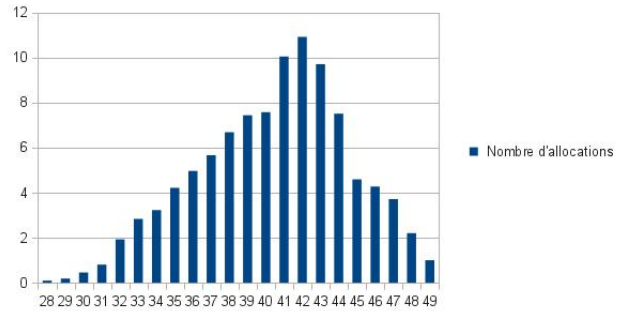


FIGURE 6 – Répartition du bien-être social utilitaire des allocations stables pour 100 instances single peaked (avec  $n = 7$ ).

**Efficacité des échanges bilatéraux.** Dans le cadre des préférence Single Peaked, nous nous sommes également intéressés à la Pareto-optimalité des allocations stables atteintes par échanges bilatéraux. Dans ce contexte, nous avons ainsi pu démontrer qu’il est garanti d’atteindre une allocation Pareto-optimale à la suite de n’importe quel suite d’échanges bilatéraux rationnels. Avant de le démontrer formellement, rappelons une notion dont nous aurons besoin dans la preuve : un profil est dit *worst-restricted* [12] si, pour tout triplet  $r_x, r_y, r_z$  de ressources, il existe toujours une ressource qui n’est pas classée dernière si l’on ne considère que le classement de ces trois ressources dans l’ordre de préférence des agents. Il est connu que la



*worst-restrictedness* est une condition nécessaire (mais non suffisante) pour qu'un profil soit single-peaked [2].

**Théorème 1.** *Lorsque les préférences sur les ressources sont de type Single Peaked, toute suite d'échanges bilatéraux rationnels mène à une allocation Pareto-optimale.*

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde et supposons qu'aucun échange bilatéral ne soit possible, mais que l'allocation obtenue ne soit pas pour autant Pareto-optimale. Cela signifie qu'il existe un ensemble  $(\mu)$  de plus de 2 ressources  $o_1, \dots, o_k$  tel que  $o_1 \succ_2 o_2, o_2 \succ_3 o_3, \dots, o_{n_1} \succ_n o_n, o_n \succ_1 o_1$  (en supposant  $o_1 = A(i)$  sans perte de généralité). Si les agents pouvaient réaliser cet échange pour un cycle de taille  $> 2$  améliorant, ils atteindraient une allocation Pareto-optimale. Maintenant, considérons les agents  $a_1$  et  $a_2$  : aucun échange bilatéral n'étant possible, il faut nécessairement que l'agent  $a_1$  range  $o_2$  derrière  $o_1$  (sinon l'échange serait possible), et ainsi de suite pour tous les agents impliqués dans le cycle. Pour le cas  $|\mu| = 3$ , on note que cela mène directement à une violation de *worst-restrictedness*, puisque les trois ressources apparaissent en dernière position.

Passons au cas  $|\mu| \geq 4$ . Pour illustration, sur un cycle de 4 agents, on aura donc :

$$\begin{array}{l} 1 : o_4 \dots \succ o_1 \succ \dots o_2 \\ 2 : o_1 \dots \succ o_2 \succ \dots o_3 \\ 3 : o_2 \dots \succ o_3 \succ \dots o_4 \\ 4 : o_3 \dots \succ o_4 \succ \dots o_1 \end{array}$$

Supposons maintenant, pour respecter la condition de *worst-restrictedness*, que parmi toutes les ressources du cycle, il n'y en a que deux qui sont classées en dernière position (parmi celles du cycle) dans l'ordre de préférence, et appelons les  $o_l$  et  $o_r$ . Observons que ces ressources ne peuvent pas être consécutives dans le cycle : si c'était le cas la condition de *worst-restrictedness* serait directement violée. Considérons à présent deux agents arbitraires  $a_i$  et  $a_j$  de ce cycle, qui ne possèdent pas les ressources extrêmes, et qui ne classent pas les ressources extrêmes de la même manière. Par l'observation précédente, ces agents doivent exister. Ces agents possèdent donc les ressources  $o_i$  et  $o_j$ . Sans perte de généralité, posons que  $o_l \succ_i o_r$  et que  $o_r \succ_j o_l$ . Du fait que  $a_i$  et  $a_j$  classent leur ressources extrêmes de manière inverse, il suit qu'ils doivent aussi classer de manière inverse les ressources  $o_i$  et  $o_j$ , sinon l'ordre single-peaked ne serait pas respecté. Mais alors un échange entre  $a_i$  et  $a_j$  doit être possible, ce qui mène à une contradiction.  $\square$

**Top-trading cycle vs. échanges bilatéraux.** Dans le cadre des préférences Single Peaked, nous avons également comparé les allocations obtenues par échanges bilatéraux aléatoires et en utilisant Top Trading Cycle. Les conditions sont les mêmes qu'en section 4. Notons que contrairement aux expérimentations précédentes, il n'est plus pertinent de s'intéresser au cas où nous appliquons les échanges bilatéraux puis le Top Trading Cycle. En effet, comme nous venons de la démontrer, les échanges bilatéraux garantissent l'obtention d'une allocation Pareto-optimale.

La génération des préférences est réalisée de la façon suivante. Pour chaque joueur, la ressource idéale est sélectionnée de manière équiprobable. Puis, tant qu'il reste une ressource « à gauche » et « à droite » de cette ressource idéale, nous choisissons comme meilleure ressource suivante une des deux de manière équiprobable (lorsque ce n'est plus possible, nous considérons dans l'ordre les ressources restantes).

La figure 7 présente les résultats obtenus en termes de bien-être utilitaire. La figure 8 présente les résultats obtenus pour le bien-être égalitaire. Notons que comme précédemment, l'expérience a été réalisée 10 000 fois.

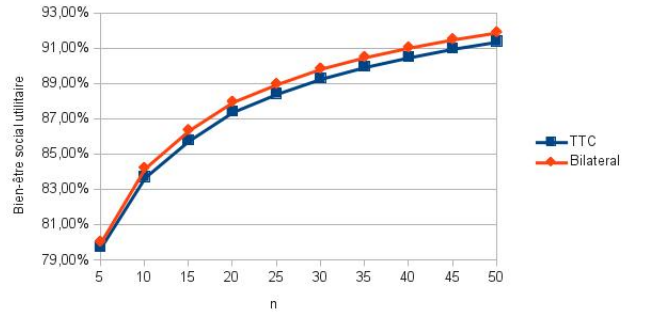


FIGURE 7 – Pourcentage du bien-être utilitaire sur le maximum des allocations finales.

Nous constatons que nous obtenons, dans cas également, un meilleur bien-être social égalitaire avec les échanges bilatéraux aléatoire. Mais cette fois-ci, nous obtenons également un bien-être social utilitaire légèrement supérieur. La procédure décentralisée se relève donc être un meilleur choix que l'algorithme de Top Trading cycle dans ce type d'instance, au moins sur les critères envisagés.

## 6 Conclusion

Nous avons étudié les problèmes d'allocation de ressources dans lesquels chaque joueur possède une unique ressource. Nous avons considéré des échanges

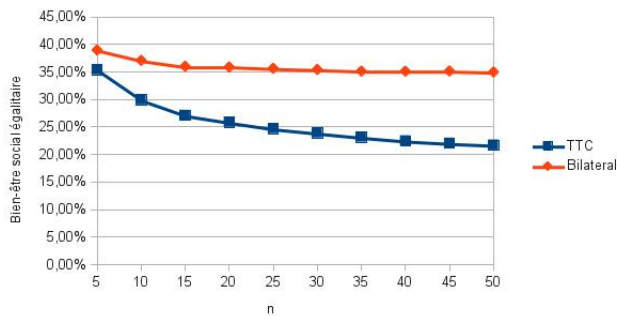


FIGURE 8 – Pourcentage du bien-être égalitaire sur le maximum des allocations finales.

rationnels réalisés individuellement et sans argent. Afin d’effectuer ces échanges, nous nous sommes intéressés à la procédure d’échanges bilatéraux aléatoires ainsi qu’à la procédure standard appelée Top Trading Cycle. Après avoir rappelé le prix de l’anarchie dans le cadre où les préférences des agents sont circulaires, nous avons étudié de manière plus précise les résultats obtenus sur ce type d’instances particulières. Nous avons ensuite généralisé notre étude à des instances où les préférences sont tirées de manière aléatoire uniforme (culture impartiale). Nous avons ainsi analysé la répartition et la qualité des allocations stables, et les performances relatives de TTC contre les échanges bilatéraux.

Dans le cas de préférences Single Peaked, nous avons démontré qu’il était garanti d’obtenir une allocation Pareto optimale en procédant à des échanges bilatéraux. Par ailleurs, en comparant les allocations finales obtenues par échanges bilatéraux et en utilisant Top Trading Cycle, nous avons mis en évidence que les échanges bilatéraux conduisaient à des résultats plus égalitaires. Bien que l’algorithme Top Trading Cycle retourne, dans le cas général, des allocations ayant un meilleur bien-être utilitaire, ce n’est plus le cas si on pose comme hypothèse que les préférences sont de type Single Peaked.

Ce travail est préliminaire à bien des égards. Par exemple, notre utilisation des outils de model checking probabiliste reste à exploiter plus avant. Une recherche exhaustive est difficile puisqu’elle demande de considérer toutes les allocations initiales, donc toutes les allocations possibles (soit  $n!$  allocations). Néanmoins, des symétries au sein de certaines instances peuvent être identifiées, ce qui nous permettrait de ne pas avoir à réaliser la recherche pour toutes les allocations initiales possibles (c’est le cas pour l’instance à permutations circulaires,). D’autre part, il est possible, à défaut d’une recherche exhaustive, d’échantillonner en

utilisant une procédure de type Monte Carlo.

## Références

- [1] Kenneth J Arrow. *Social choice and individual values.* (Cowles Commission Monogr. No. 12.). Wiley, 1951.
- [2] Miguel A Ballester and Guillaume Haeringer. A characterization of the single-peaked domain. *Social Choice and Welfare*, 36(2) :305–322, 2011.
- [3] Duncan Black. On the rationale of group decision-making. *The Journal of Political Economy*, 56(1) :23, 1948.
- [4] Duncan Black, Robert Albert Newing, Iain McLean, Alistair McMillan, and Burt L Monroe. *The theory of committees and elections.* Springer, 1958.
- [5] Tristan Cazenave, Yann Chevaleyre, Gaëtan Marseau, and Nicolas Maudet. Troc combinatoire à monte-carlo. In *ROADEF-2010*, 2010.
- [6] Anthony Chavez, Alexandros Moukas, and Pattie Maes. Challenger : A multi-agent system for distributed resource allocation. In *Proceedings of the first international conference on Autonomous agents*, pages 323–331. ACM, 1997.
- [7] Yann Chevaleyre, Paul E Dunne, Ulle Endriss, Jérôme Lang, Michel Lemaitre, Nicolas Maudet, Julian Padget, Steve Phelps, Juan A Rodriguez-Aguilar, and Paulo Sousa. Issues in multiagent resource allocation. *Informatica (03505596)*, 30(1), 2006.
- [8] Dorothea Herreiner and Clemens Puppe. A simple procedure for finding equitable allocations of indivisible goods. pages 415–430, 2002.
- [9] Sarit Kraus. *Strategic negotiation in multiagent environments.* MIT press, 2001.
- [10] Jeffrey S Rosenschein and Gilad Zlotkin. *Rules of Encounter.* pub-mit, 1994.
- [11] Tuomas W Sandholm. Distributed rational decision making. *Multiagent systems : a modern approach to distributed artificial intelligence*, pages 201–258, 1999.
- [12] Amartya K Sen. A possibility theorem on majority decisions. *Econometrica*, 34(2) :491–499, 1966.
- [13] Lloyd Shapley and Herbert Scarf. On cores and indivisibility. *Journal of mathematical economics*, 1(1) :23–37, 1974.