La mise-à-jour des croyances pour des fragments de la logique propositionnelle

Nadia Creignou[1] **Raida Ktari**[1,2] **Odile Papini**[2]

[1] Aix-Marseille Université, CNRS, LIF UMR 7279, 13288 Marseille, France
[2] Aix-Marseille Université, CNRS, LSIS UMR 7296, 13288 Marseille, France
{nadia.creignou, raida.ktari, odile.papini}@univ-amu.fr

Résumé

Le changement de croyances dans le cadre de fragments de la logique propositionnelle est l'objet d'un intérêt croissant. Les travaux antérieurs ont essentiellement porté sur la contraction et la révision de croyances, principalement pour le fragment de Horn. Très récemment une approche générale a été proposée pour adapter des opérateurs de révision connus afin que le résultat de la révision puisse rester dans le fragment de la logique propositionnelle considéré. Cette approche ne se limite pas au fragment de Horn mais s'applique à tout fragment de la logique propositionnelle caractérisable par une propriété de clôture des ensembles de modèles des formules de ce fragment. Nous nous intéressons ici à la même problématique pour les opérateurs de mise-à-jour. Nous étudions les propriétés logiques des opérateurs proposés en termes de satisfaction des postulats de Katsuno et Mendelzon pour la mise-à-jour dans différents fragments.

Abstract

Recently, belief change within the framework of fragments of propositional logic has gained attention. Previous works focused on belief contraction and belief revision mainly on the Horn fragment. However, the problem of belief update within the framework of fragments of propositional logic has been neglected so far. This paper presents a general approach to define new update operators derived from existing ones such that the result of update remains in the fragment under consideration. Our approach is not limited to the case of the Horn fragment but applicable to any fragment of propositional logic characterized by a closure property of the sets of models of their formulas. We study the logical properties of the proposed operators in terms of K. and M.'s postulates satisfaction.

1 Introduction

Parmi les opérations de changement de croyances, la mise-à-jour est une opération qui permet d'intégrer à l'ensemble des croyances d'un agent une nouvelle information qui reflète un changement qui est intervenu dans son environnement. L'environnement évolue et les changements, lorsqu'ils sont observés, modifient les croyances de l'agent.

La problématique de la mise-à-jour est d'abord apparue dans le domaine des bases de données pour la mise-à-jour de bases de données déductives [13] et des liens sont rapidement apparus avec les travaux développés en intelligence artificielle sur le changement de croyances, en particulier sur la révision.

Keller et Winslett [20] puis Katsuno et Mendelzon [19] ont mis en lumière la différence entre les opérations de révision et de mise-à-jour lorsqu'ils ont proposé un cadre commun pour représenter ces opérations. La révision se produit lorsqu'une nouvelle information est introduite dans un environnement statique alors que la mise-à-jour se produit lorsque l'environnement lui-même évolue. D'un point de vue logique, lorsque l'ensemble des croyances d'un agent est représenté par une formule logique, la révision revient à faire évoluer globalement les modèles de cette formule vers les modèles les plus proches satisfaisant la nouvelle information. La mise-à-jour consiste à faire évoluer localement chaque modèle de cette formule vers les modèles les plus proches satisfaisant la nouvelle information.

Des postulats caractérisant le comportement rationnel des opérateurs de mise-à-jour ont été proposés par Katsuno et Mendelzon (KM) [19] dans le même esprit que ceux proposés par Alchourron, Makinson et Gärdenfors (AGM) [1] pour la révision. La mise-à-jour a été largement étudiée, dans la plupart des cas, dans le cadre de la logique propositionnelle et des opérateurs concrets de mise-à-jour ont été proposés principalement d'un point de vue sémantique (basé sur les modèles) [14, 6, 11, 26, 3, 15, 16, 10, 21, 7].

De nombreux travaux ont porté sur le changement de croyances dans le cadre de fragments de la logique propositionnelle, en particulier sur la contraction [2, 27, 9] et la révision [8, 28, 23, 4]. Cependant, à notre connaissance, le problème de la mise-à-jour dans le cadre de fragments propositionnels n'a pas été abordé, à l'exception de travaux sur la complexité de la mise-à-jour pour des fragments de Horn [12, 22].

Les motivations de l'étude de la mise-à-jour pour des fragments proposionnels reposent sur les deux observations suivantes :

- Dans de nombreuses applications, le language est restreint a priori. Par exemple des formalisations de connaissances génériques basées sur des règles sont plus faciles à manipuler pour des utilisateurs. Si des utilisateurs veulent mettre à jour certaines règles, ils s'attendent à ce que le résultat apparaisse sous un même format facile à manipuler.
- On dispose de méthodes efficaces de raisonnement pour de nombreux fragments propositionnels. Si un agent doit fréquemment mettre à jour ses croyances, il doit pouvoir le faire efficacement, aussi la formule représentant ses croyances doit être représentée dans une classe de langages traitables et il en est de même pour le résultat des mise-à-jour. Si un agent doit rarement mettre à jour ses croyances, peu importe si la mise-à-jour s'effectue efficacement, ce qui compte c'est le résultat qui doit être évalué efficacement.

Il semble donc naturel d'étudier dans quelle mesure les opérateurs de mise-à-jour connus peuvent être raffinés pour rester dans le langage d'un fragment considéré.

Soit $\mathcal{L}'$ un fragment de la logique propositionnelle et deux formules ψ, $\mu \in \mathcal{L}'$, l'obstacle principal est qu'il n'est pas garanti que le résultat de la mise-à-jour, noté $\psi \diamond \mu$, reste dans $\mathcal{L}'$.

Prenons l'exemple d'un fragment de Horn $\mathcal{L}'$ et de deux formules ψ et μ dans ce fragment telles que $\psi = a \wedge b$ et $\mu = \neg a \vee \neg b$. Le résultat de la mise-à-jour de ψ par μ ne reste pas dans $\mathcal{L}'$ puisqu'il est équivalent à $\phi = (a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$.

Pour résoudre ce problème nous utilisons la notion de raffinement proposée dans le cas de la révision [4] qui adapte un opérateur défini dans le cadre propositionnel afin qu'il puisse s'appliquer dans le cadre d'un fragment. Les propriétés de base d'un raffinement sont d'une part qu'il fournisse un résultat de l'opération de changement qui reste dans le fragment et d'autre part qu'il ne modifie pas le comportement de l'opération de changement si le résultat est déjà dans le fragment.

Nous proposons de raffiner les opérateurs de mise-à-jour afin qu'ils puissent opérer sur des fragments. Nous introduisons des critères naturels que les raffinements doivent satisfaire et nous proposons une caractérisation de ces opérateurs raffinés de manière constructive. Cette caractérisation nous permet d'étudier leurs propriétés logiques en terme de satisfaction des postulats KM. Nous prouvons que les postulats KM de base $(\mathrm{U1}) - (\mathrm{U4})$ sont préservés pour tout raffinement et tout fragment. Nous étudions ensuite les limites de la préservation des autres postulats.

2 Préliminaires

2.1 Logique Propositionnelle

Nous considérons $\mathcal{L}$, le langage de la logique propositionnelle défini sur un ensemble infini dénombrable de variables (atomes) muni des connecteurs logiques usuels $\rightarrow$, $\oplus, \vee, \wedge, \neg$ et des constantes $\top, \bot$. Etant donné une formule ϕ de $\mathcal{L}$ on note $\mathrm{Var}(\phi)$ l'ensemble des variables apparaissant dans ϕ. Un *littéral* est un atome ou sa négation. Une clause est une disjonction de littéraux. Une clause est dite de *Horn* si elle comporte au plus un littéral positif, de *Krom* si elle comporte au plus deux littéraux. Nous considérons les sous-ensembles de $\mathcal{L}$ suivants : $\mathcal{L}_{Horn}$ est l'ensemble des formules de $\mathcal{L}$ formées par la conjonction de clauses de Horn, $\mathcal{L}_{Krom}$ est l'ensemble des formules de $\mathcal{L}$ formées par la conjonction de clauses de Krom.

Soit $\mathcal{U}$ un ensemble fini d'atomes. Une interprétation sur $\mathcal{U}$ est représentée par un ensemble $\omega \subseteq \mathcal{U}$ d'atomes évalués à *vrai* ou par son vecteur caractéristique correspondant, de longueur $|\mathcal{U}|$. Par exemple, si nous considérons $\mathcal{U} = \{x_1, \ldots, x_6\}$, l'interprétation $x_1 = x_3 = x_6 = 1$ et $x_2 = x_4 = x_5 = 0$ sera représentée soit par $\{x_1, x_3, x_6\}$ soit par $(1, 0, 1, 0, 0, 1)$. Comme d'habitude, si une interprétation ω sur $\mathcal{U}$ satisfait une formule ϕ telle que $\mathrm{Var}(\phi) \subseteq \mathcal{U}$, nous l'appelons modèle de ϕ et nous notons $\mathrm{Mod}(\phi)$ l'ensemble des modèles de ϕ. De plus, $\psi \models \phi$ si $\mathrm{Mod}(\psi) \subseteq \mathrm{Mod}(\phi)$ et $\psi \equiv \phi$ (ψ et ϕ sont équivalentes) si $\mathrm{Mod}(\psi) = \mathrm{Mod}(\phi)$. Une formule ψ est dite *complète* sur $\mathcal{U}$ si $\mathrm{Var}(\psi) \subseteq \mathcal{U}$ et si pour toute formule $\mu \in \mathcal{L}$ telle que $\mathrm{Var}(\mu) \subseteq \mathcal{U}$ on a $\psi \models \mu$ ou $\psi \models \neg\mu$. Les conséquences logiques d'une formule ϕ, notées $Cn(\phi)$, sont toutes les formules ψ du langage satisfaites par tous les modèles de ϕ. Formellement, $Cn(\phi) = \{\psi \in \mathcal{L}, \phi \models \psi\}$. Une théorie T est un ensemble de formules déductivement clos, c.-à-d. $T = Cn(T)$. Pour les fragments $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$, nous utilisons la notation $T_{\mathcal{L}'}(\psi) = \{\phi \in \mathcal{L}' \mid \psi \models \phi\}$.

2.2 Fragments caractérisables de la logique propositionnelle

Nous considérons $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions booléennes $\beta\colon \{0,1\}^k \rightarrow \{0,1\}$ avec $k \geq 1$, qui possèdent les propriétés suivantes :

- *symétrie*, c.-à-d. pour toute permutation σ, $\beta(x_1, \ldots, x_k) = \beta(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)})$,

– 0- et 1-*reproduction*, c.-à-d. pour tout $x \in \{0, 1\}$, $\beta(x, \dots, x) = x$.

Des exemples de ces fonctions sont la fonction binaire **et** notée $\wedge$, et la fonction ternaire **majorité**, $\mathrm{maj}_3(x, y, z) = 1$ si et seulement si au moins deux des variables x, y, et z sont mises à 1.

Nous étendons les fonctions booléennes aux interprétations en appliquant ces fonctions aux coordonnés des vecteurs qui les représentent. Ainsi, si $m_1, \dots, m_k \in \{0, 1\}^n$, alors $\beta(m_1, \dots, m_k)$ est défini par $(\beta(m_1[1], \dots, m_k[1]), \dots, \beta(m_1[n], \dots, m_k[n]))$, où $m[i]$ est la i-ème coordonnée de l'interprétation m.

Definition 1. *Soit $\mathcal{M} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$ un ensemble d'interprétations et $\beta \in \mathcal{B}$, nous définissons $Cl_\beta(\mathcal{M})$, la* clôture *de $\mathcal{M}$ pour β, comme le plus petit ensemble d'interprétations contenant $\mathcal{M}$ et clos sous l'action de β, c.-à-d. si $m_1, \dots, m_k \in Cl_\beta(\mathcal{M})$, alors $\beta(m_1, \dots, m_k) \in Cl_\beta(\mathcal{M})$.*

Les propriétés de la clôture sont (i) la monotonie, c.-à-d. si $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, alors $Cl_\beta(\mathcal{M}) \subseteq Cl_\beta(\mathcal{N})$; (ii) si $|\mathcal{M}| = 1$, alors $Cl_\beta(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ (car par hypothèse β est une 0- et 1-reproduction) ; (iii) $Cl_\beta(\emptyset) = \emptyset$.

Definition 2. *Soit $\beta \in \mathcal{B}$. Un ensemble de formules propositionnelles $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ est un β-*fragment *si :*

1. *Pour toute formule $\psi \in \mathcal{L}'$, $\mathrm{Mod}(\psi) = Cl_\beta(\mathrm{Mod}(\psi))$*
2. *Pour tout $\mathcal{M} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$ avec $\mathcal{M} = Cl_\beta(\mathcal{M})$ il existe une formule $\psi \in \mathcal{L}'$ avec $\mathrm{Mod}(\psi) = \mathcal{M}$*
3. *Si $\phi, \psi \in \mathcal{L}'$, alors $\phi \wedge \psi \in \mathcal{L}'$.*

Les fragments $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ qui sont des *β-fragments* pour un $\beta \in \mathcal{B}$, sont appelés aussi des *fragments caractérisables* de la logique propositionnelle. Les fragments les plus connus de la logique propositionnelle sont $\mathcal{L}_{Horn}$ qui est un $\wedge$-fragment, et $\mathcal{L}_{Krom}$ qui est un maj_3-fragment [17, 24].

2.3 Mise à jour

La mise-à-jour est une opération qui permet d'intégrer à l'ensemble des croyances d'un agent une nouvelle information qui reflète un changement qui est intervenu dans son environnement. Les opérateurs de mise-à-jour que nous étudions sont des fonctions $\diamond : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, qui à partir d'une formule ψ qui représente l'ensemble des croyances d'un agent et d'une formule μ qui code la nouvelle information reflètant l'évolution de l'environnement, renvoie une nouvelle formule $\psi \diamond \mu$.

Des postulats que tout opérateur de mise-à-jour devrait satisfaire ont été proposés [18] de façon similaire aux *postulats AGM* proposés pour la révision [1].

Soit $\psi, \psi_1, \psi_2, \mu, \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{L}$.

(U1) $\psi \diamond \mu \models \mu$.
(U2) Si $\psi \models \mu$, alors $\psi \diamond \mu \equiv \psi$.
(U3) Si ψ et μ sont satisfaisables, alors $\psi \diamond \mu$ l'est aussi.
(U4) Si $\psi_1 \equiv \psi_2$ et $\mu_1 \equiv \mu_2$, alors $\psi_1 \diamond \mu_1 \equiv \psi_2 \diamond \mu_2$.
(U5) $(\psi \diamond \mu) \wedge \phi \models \psi \diamond (\mu \wedge \phi)$.
(U6) Si $(\psi \diamond \mu_1) \models \mu_2$ et $(\psi \diamond \mu_2) \models \mu_1$, alors $\psi \diamond \mu_1 \equiv \psi \diamond \mu_2$.
(U7) Si ψ est complète, alors $(\psi \diamond \mu_1) \wedge (\psi \diamond \mu_2) \models \psi \diamond (\mu_1 \vee \mu_2)$.
(U8) $(\psi_1 \vee \psi_2) \diamond \mu \equiv (\psi_1 \diamond \mu) \vee (\psi_2 \diamond \mu)$.
(U9) Si ψ est complète et $(\psi \diamond \mu) \wedge \phi$ est satisfaisable, alors $\psi \diamond (\mu \wedge \phi) \models (\psi \diamond \mu) \wedge \phi$.

Pour les opérations de révision un théorème de représentation [18] montre qu'un opérateur de révision correspond à un ensemble de préordres sur les interprétations. Plus formellement, pour tout $\psi, \mu \in \mathcal{L}$ et pour $\leq_\psi$ un préordre sur les interprétations vérifiant certaines conditons [18], un opérateur de révision est défini par $\mathrm{Mod}(\psi \circ \mu) = min(\mathrm{Mod}(\mu), \leq_\psi)$. De manière similaire un théorème de représentation [19] a été proposé pour la mise-à-jour. Plus formellement, pour tout $m \in Mod(\psi)$, $\mu \in \mathcal{L}$ et pour $\leq_m$ un préordre sur les interprétations vérifiant certaines conditons [19], un opérateur de mise-à-jour est défini par $\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu) = \bigcup_{m \in \mathrm{Mod}(\psi)} min(\mathrm{Mod}(\mu), \leq_m)$. Cette distinction entre révision et mise-à-jour a été mise en évidence par Katsuno et Mendelzon [19] qui ont montré que la minimisation dans le cas de la mise-à-jour opère localement, modèle par modèle de ψ, alors que pour la révision la minimisation opère globalement sur tous les modèles de ψ.

Les opérateurs sémantiques de mise-à-jour sélectionnent pour chaque modèle m de ψ, l'ensemble des modèles de μ qui sont les plus "proches" de m, alors que les opérateurs de révision sélectionnent l'ensemble des modèles de μ qui sont les plus "proches" de l'ensemble des modèles de ψ.

L'exemple suivant illustre la différence entre la révision et la mise-à-jour.

Example 1. *Soit $\psi = (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$ et $\mu = \neg a$. Les interprétations sont $\omega_1 = \{a, b\}$, $\omega_2 = \{a\}$, $\omega_3 = \{b\}$ et $\omega_4 = \{\emptyset\}$. $Mod(\psi) = \{\omega_2, \omega_3\}$ et $Mod(\mu) = \{\omega_3, \omega_4\}$. Soit $\omega \Delta \omega'$ la différence symétrique entre deux interprétations, la minimisation globale de la cardinalité de la différence symétrique entre les modèles de ψ et de μ conduit pour la révision à $\mathrm{Mod}(\psi \circ \mu) = \{\omega_3\}$, alors que la minimisation de la cardinalité de la différence symétrique entre chaque modèle de ψ et les modèles de μ conduit pour la mise-à-jour à $\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu) = \{\omega_3, \omega_4\}$.*

Plusieurs opérateurs de mise-à-jour ont été définis. Nous présentons dans ce papier les deux opérateurs sémantiques les plus connus et sur lesquels nous allons nous concentrer : les opérateurs de Forbus et Winslett.

L'opérateur de Forbus a été introduit dans [14] dans le cadre d'une application particulière dans le domaine de la physique qualitative. C'est l'analogue pour la mise-à-jour de l'opérateur de révision défini par *Dalal* dans [5]. Cet opérateur de mise-à-jour recherche les modèles de μ les plus proches de chacun des modèles de ψ, la proximité se mesurant en terme de cardinalité de la différence symétrique entre modèles. Plus formellement, soit m et m' deux interprétations. Notons la différence symétrique entre m et m' par $m\Delta m'$ et définissons la distance $|\Delta|_m^{min}(\mu)$ entre un modèle m et une formule μ comme suit :

$$|\Delta|_m^{min}(\mu) = min\{|m\Delta m'| : m' \in \mathrm{Mod}(\mu)\}$$

Cette distance désigne le nombre minimal de variables propositionnelles pour lesquelles un modèle de μ et m diffèrent. La mise-à-jour d'une formule ψ par μ selon l'opérateur Forbus est maintenant définie formellement comme :

$$\mathrm{Mod}(\psi \diamond_F \mu) = \bigcup_{m \in \mathrm{Mod}(\psi)} \{m' \in \mathrm{Mod}(\mu) : |m\Delta m'| = |\Delta|_m^{min}(\mu)\}$$

L'opérateur de Forbus $\diamond_F$ satisfait les postulats (U1)-(U8) [18]. De plus il est montré dans [16] que $\diamond_F$ satisfait également le postulat (U9).

Example 2. *Soit* $\mathrm{Mod}(\psi) = \{\{a,b,c\},\{a,b,c,d,e\}\}$ *et* $\mathrm{Mod}(\mu) = \{\{b,c\},\{c,d\},\{a,b,d\},\{c\},\{d\},\{b\},\emptyset\}$. *Le résultat de mise-à-jour peut se lire dans la Table 1. Dans cette table, la case correspondant à un modèle* m *de* ψ *et à un modèle* m' *de* μ *contient* $|m\Delta m'|$. *Dans chaque ligne du tableau, c.-à-d. pour chaque modèle de* ψ*, sont indiquées en gras les cardinalités minimales, qui de fait désignent l'ensemble des modèles* m' *de* μ *correspondants comme étant le résultat de la mise-à-jour.*

L'opérateur de Winslett est aussi appelé *PMA (Possible Models Aproach)*. Il a été introduit dans [25] dans le cadre du raisonnement sur les actions et sur le changement. Cet opérateur de mise-à-jour recherche les modèles de μ les plus proches de chacun des modèles de ψ, la proximité se mesurant en terme d'inclusion ensembliste de la différence symétrique entre modèles. Plus formellement, pour un modèle m et une formule μ, définissons la distance $\Delta_m^{min}(\mu)$ comme suit :

$$\Delta_m^{min}(\mu) = min_{\subseteq}(\{m\Delta m' : m' \in \mathrm{Mod}(\mu)\})$$

c.-à-d. $\Delta_m^{min}(\mu)$ désigne les ensembles minimaux, au sens de l'inclusion, de variables propositionnelles pour lesquelles les modèles de μ et m diffèrent. La mise-à-jour d'une formule ψ par μ selon Winslett est définie maintenant de la manière suivante :

$$\mathrm{Mod}(\psi \diamond_W \mu) = \bigcup_{m \in \mathrm{Mod}(\psi)} \{m' \in \mathrm{Mod}(\mu) : m\Delta m' \in \Delta_m^{min}(\mu)\}$$

L'opérateur de Winslett $\diamond_W$ satisfait les postulats (U1)-(U8) [18], mais ne satisfait pas le postulat (U9).

L'opérateur de Winslett $\diamond_W$ se comporte différemment de l'opérateur de Forbus $\diamond_F$, comme en atteste l'exemple suivant.

Example 3. *Reprenons l'Exemple 2. Le résultat de la mise-à-jour selon Winslett sur cet exemple se lit dans la Table 2. Cette fois une case de la table contient le sous-ensemble* $m\Delta m'$ *et dans chaque ligne sont mis en gras les sous-ensembles minimaux pour l'inclusion.*

Nous obtenons donc $\mathrm{Mod}(\psi \diamond_W \mu) = \{\{b,c\},\{c,d\},\{a,b,d\}\} \neq \mathrm{Mod}(\psi \diamond_F \mu)$.

Dans cet article nous nous intéressons aux opérateurs de mise-à-jour adaptés à certains fragments de la logique propositionnelle. La définition des opérateurs de mise-à-jour que nous considérons est la suivante, elle est très générale. Nous examinerons ensuite des opérateurs de mise-à-jour satisfaisant différents critères et postulats.

Definition 3. *Un opérateur basique de mise-à-jour est défini comme étant une fonction* $\diamond : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ *satisfaisant* $\top \diamond \mu \equiv \mu$ *pour chaque* $\mu \in \mathcal{L}$. *On dit que* $\diamond$ *satisfait les postulats* (Ui) $(i \in \{1,\ldots,9\})$ dans un fragment $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ si ces postulats sont valides lorsqu'on se restreint à des formules dans $\mathcal{L}'$.

3 Raffinements d'opérateurs

3.1 Problématique

Considérons tout d'abord un exemple qui illustre les problèmes posés par les opérateurs de mise-à-jour standards quand on désire travailler dans des fragments de la logique propositionnelle.

Example 4. *Soit deux formules* $\psi, \mu \in \mathcal{L}_{Horn}$ *définies par* $\mathrm{Mod}(\psi) = \{\{a\},\{a,b\}\}$ *et* $\mathrm{Mod}(\mu) = \{\{a\},\{b\},\emptyset\}$. *Le résultat de mise-à-jour de* ψ *par* μ *selon l'opérateur de Forbus ou celui de Winslett a pour ensemble de modèles* $\{\{a\},\{b\}\}$*, que nous pouvons par exemple représenter par* $\phi = (a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$. *Nous constatons que* $\phi \notin \mathcal{L}_{Horn}$*, qui plus est il n'existe aucune formule de Horn dont l'ensemble des modèles est* $\{\{a\},\{b\}\}$ *puisque cet ensemble n'est pas clos par intersection (*$\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$*). En revanche, nous avons également* $\psi, \mu \in \mathcal{L}_{Krom}$*, ainsi que le résultat de la mise-à-jour* $\phi \in \mathcal{L}_{Krom}$. *Cela montre que le comportement d'un opérateur sur une même instance peut-être satisfaisant sur un certain fragment et ne plus l'être sur un autre.*

$Mod(\psi)$	$Mod(\mu)$						
	{b,c}	{c,d}	{a,b,d}	{c}	{d}	{b}	$\emptyset$
{a,b,c}	**1**	3	2	2	4	2	3
{a,b,c,d,e}	3	3	**2**	4	4	4	5

TABLE 1 – Exemple pour l'opérateur $\diamond_F$

$Mod(\psi)$	$Mod(\mu)$						
	{b,c}	{c,d}	{a,b,d}	{c}	{d}	{b}	$\emptyset$
{a,b,c}	**{a}**	{a,b,d}	**{c,d}**	{a,b}	{a,b,c,d}	{a,c}	{a,b,c}
{a,b,c,d,e}	**{a,d,e}**	**{a,b,e}**	**{c,e}**	{a,b,d,e}	{a,b,c,e}	{a,c,d,e}	{a,b,c,d,e}

TABLE 2 – Exemple pour l'opérateur $\diamond_W$

L'objectif du papier est le suivant : étant donné un opérateur de mise-à-jour $\diamond$ et un fragment $\mathcal{L}'$ de la logique propositionnelle, comment peut-on raffiner l'opérateur $\diamond$ en un opérateur noté $\blacklozenge$ de telle sorte que pour tous $\psi, \mu \in \mathcal{L}'$, on ait $\psi \blacklozenge \mu \in \mathcal{L}'$?

Definition 4. *Soit $\mathcal{L}'$ un fragment de la logique propositionnelle et $\diamond : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ un opérateur de mise-à-jour. On appelle $\blacklozenge : \mathcal{L}' \times \mathcal{L}' \to \mathcal{L}'$ un $\diamond$-raffinement pour $\mathcal{L}'$ s'il satisfait les propriétés suivantes, pour tous ψ, ψ', μ et $\mu' \in \mathcal{L}'$.*

- *cohérence : $\psi \blacklozenge \mu$ est satisfaisable si et seulement si $\psi \diamond \mu$ est satisfaisable.*
- *équivalence : Si $\psi \diamond \mu \equiv \psi' \diamond \mu'$ alors, $\psi \blacklozenge \mu \equiv \psi' \blacklozenge \mu'$.*
- *approximation : $T_{\mathcal{L}'}(\psi \diamond \mu) \subseteq T_{\mathcal{L}'}(\psi \blacklozenge \mu)$.*
- *invariance : Si $\psi \diamond \mu \in \mathcal{L}'$, alors $T_{\mathcal{L}'}(\psi \blacklozenge \mu) = T_{\mathcal{L}'}(\psi \diamond \mu)$.*

Discutons maintenant brièvement ces propriétés. Les deux premières conditions sont indépendantes de $\mathcal{L}'$ mais relient le nouvel opérateur $\blacklozenge$ à l'opérateur original $\diamond$. Plus précisément, la *cohérence* indique que l'opérateur raffiné $\blacklozenge$ fournit un résultat cohérent si et seulement si le résultat de l'opérateur initial est cohérent. L'*équivalence* signifie que si l'opérateur original $\diamond$ ne dépend pas de la syntaxe, alors l'opérateur raffiné $\blacklozenge$ n'en dépend pas non plus. Les deux dernières propriétés prennent en compte le fragment $\mathcal{L}'$. L'*approximation* assure que $\blacklozenge$ peut être considéré comme une forme d'approximation de l'opérateur $\diamond$ lorsqu'il est appliqué dans le fragment $\mathcal{L}'$, tandis que l'*invariance* stipule que si le résultat de l'opérateur initial de mise-à-jour est dans $\mathcal{L}'$, alors il n'y a rien à faire.

Donnons un premier exemple de raffinement possible.

Definition 5. *Soit $\diamond : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ un opérateur de mise-à-jour, $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ un fragment de la logique propositionnelle, tel que $\mathcal{L}'$ est un β-fragment pour un certain $\beta \in \mathcal{B}$. On définit l'opérateur de mise-à-jour $\diamond^{Cl_\beta}$ sur $\mathcal{L}'$ comme suit :*

$$\mathrm{Mod}(\psi \diamond^{Cl_\beta} \mu) := Cl_\beta(\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu)). \qquad (1)$$

Example 5. *Rappelons l'Exemple 4, où nous avons $\psi, \mu \in \mathcal{L}_{Horn}$ avec $\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu) = \{\{a\}, \{b\}\}$ ($\diamond \in \{\diamond_W, \diamond_F\}$). Notre opérateur raffiné $\diamond^{Cl_\wedge}$ est défini comme étant $\mathrm{Mod}(\psi \diamond^{Cl_\wedge} \mu) = Cl_\wedge(\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu)) = \{\{a\}, \{b\}, \emptyset\}$ et donne donc une mise-à-jour dans $\mathcal{L}_{Horn}$.*

Proposition 1. *Pour tout opérateur de mise-à-jour, $\diamond : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ et pour tout β-fragment $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ de la logique propositionnelle, $\diamond^{Cl_\beta}$ est un $\diamond$-raffinement pour $\mathcal{L}'$.*

Démonstration. Pour tout $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} = Cl_\beta(\mathcal{M})$, il existe une formule $\phi \in \mathcal{L}'$ avec $\mathrm{Mod}(\phi) = \mathcal{M}$. Ainsi, l'opérateur $\diamond^{Cl_\beta}$ donne bien une application $\mathcal{L}' \times \mathcal{L}' \to \mathcal{L}'$. Il reste à montrer que $\diamond^{Cl_\beta}$ satisfait les quatre propriétés de la Définition 4.

Cohérence : si $\psi \diamond \mu$ est satisfaisable alors $\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu) \neq \emptyset$. Par définition, nous avons $\mathrm{Mod}(\psi \diamond^{Cl_\beta} \mu) = Cl_\beta(\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu))$. Or $\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu) \subseteq Cl_\beta(\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu))$, donc $Cl_\beta(\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu)) \neq \emptyset$. Réciproquement, si $\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu) = \emptyset$, alors $\mathrm{Mod}(\psi \diamond^{Cl_\beta} \mu) = Cl_\beta(\emptyset) = \emptyset$.

Equivalence : si $\psi \diamond \mu \equiv \psi' \diamond \mu'$, alors $\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu) = \mathrm{Mod}(\psi' \diamond \mu')$, et donc $Cl_\beta(\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu)) = Cl_\beta(\mathrm{Mod}(\psi' \diamond \mu'))$. Ainsi, $\mathrm{Mod}(\psi \diamond^{Cl_\beta} \mu) = \mathrm{Mod}(\psi' \diamond^{Cl_\beta} \mu')$. Donc, $\psi \diamond^{Cl_\beta} \mu \equiv \psi' \diamond^{Cl_\beta} \mu'$.

Approximation : $T_{\mathcal{L}'}(\psi \diamond \mu) = \{\phi \in \mathcal{L}' \mid \psi \diamond \mu \models \phi\} = \{\phi \in \mathcal{L}' \mid \mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu) \subseteq \mathrm{Mod}(\phi)\}$. Or, si $\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu) \subseteq \mathrm{Mod}(\phi)$ alors par monotonie de la clôture nous avons également $Cl_\beta(\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu)) \subseteq Cl_\beta(\mathrm{Mod}(\phi))$. De plus puisque $\phi \in \mathcal{L}'$ on a $Cl_\beta(\mathrm{Mod}(\phi)) = \mathrm{Mod}(\phi)$. Par conséquent, $\{\phi \in \mathcal{L}' \mid \mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu) \subseteq \mathrm{Mod}(\phi)\} \subseteq \{\phi \in \mathcal{L}' \mid Cl_\beta(\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu)) \subseteq \mathrm{Mod}(\phi)\}$, et donc $T_{\mathcal{L}'}(\psi \diamond \mu) \subseteq T_{\mathcal{L}'}(\psi \diamond^{Cl_\beta} \mu)$.

Invariance : $\psi \diamond \mu \in \mathcal{L}'$, alors $Cl_\beta(\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu)) = \mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu)$, et donc $\psi \diamond^{Cl_\beta} \mu \equiv \psi \diamond \mu$. Par conséquent, $T_{\mathcal{L}'}(\psi \diamond^{Cl_\beta} \mu) = T_{\mathcal{L}'}(\psi \diamond \mu)$. $\square$

Comme illustré par l'exemple suivant, prendre la clôture de l'ensemble des modèles fourni par l'opérateur original n'est pas la seule approche possible.

Example 6. *Considérons les formules $\psi, \mu \in \mathcal{L}_{Horn}$ telles que* $\mathrm{Mod}(\psi) = \{\{a,b,c,d\},\{a,b\}\}$ *et* $\mathrm{Mod}(\mu) = \{\{a,b\},\{b,c,d\},\{c,d\},\{b\},\{c\},\emptyset\}$*, et* $\diamond \in \{\diamond_W, \diamond_F\}$*. Nous avons donc* $\mathcal{M} := \mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu) = \{\{a,b\},\{b,c,d\}\}$*. Afin d'obtenir un ensemble clos par intersection à partir de $\mathcal{M}$ on peut ou bien ajouter l'interprétation $\{b\}$, ou bien enlever une des deux interprétations $\{a,b\}$ ou $\{b,c,d\}$.*

Dans la suite de ce papier, nous montrons comment caractériser la classe de *tous* les raffinements d'opérateurs de mise-à-jour.

3.2 Caractérisation

La caractérisation de tous les raffinements possibles d'un opérateur de mise-à-jour dans un fragment passe par la notion de β-application définie ci-dessous.

Definition 6. *Etant donné $\beta \in \mathcal{B}$, nous définissons une* β-application*, f_β, comme étant une application d'un ensemble de modèles vers un ensemble de modèles, $f_\beta \colon 2^{2^{\mathcal{U}}} \longrightarrow 2^{2^{\mathcal{U}}}$, telle que pour chaque $\mathcal{M} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$:*

1. *$Cl_\beta(f_\beta(\mathcal{M})) = f_\beta(\mathcal{M})$, c.-à-d. $f_\beta(\mathcal{M})$ est clos sous β*
2. *$f_\beta(\mathcal{M}) \subseteq Cl_\beta(\mathcal{M})$*
3. *Si $\mathcal{M} = Cl_\beta(\mathcal{M})$, alors $f_\beta(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$*
4. *Si $\mathcal{M} \neq \emptyset$, alors $f_\beta(\mathcal{M}) \neq \emptyset$.*

L'idée, afin d'obtenir de nouveaux raffinements, est de remplacer Cl_β par une β-application f_β arbitraire. Notons que l'application Cl_β elle-même est une β-application pour tout $\beta \in \mathcal{B}$. En général, le concept de β-application nous permet de définir une famille d'opérateurs raffinés pour les fragments de la logique propositionnelle comme suit.

Definition 7. *Soit $\diamond : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ un opérateur de mise-à-jour et $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ un β-fragment de la logique propositionnelle avec $\beta \in \mathcal{B}$. Etant donné une β-applicationf_β, nous notons par $\diamond^{f_\beta} : \mathcal{L}' \times \mathcal{L}' \longrightarrow \mathcal{L}'$ l'opérateur de mise-à-jour de $\mathcal{L}'$ défini par* $\mathrm{Mod}(\psi \diamond^{f_\beta} \mu) := f_\beta(\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu))$.

La famille $[\diamond, \mathcal{L}']$ est définie comme étant l'ensemble de tous les opérateurs $\diamond^{f_\beta}$ où f_β est une β-application.

La proposition suivante est centrale puisqu'elle montre que la famille ci-dessus capture exactement tous les raffinements possibles d'un opérateur de mise-à-jour que nous avions à l'esprit. La preuve est similaire à celle donnée dans le cadre de la révision (voir [4]).

Proposition 2. *Soit $\diamond : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ un opérateur basique de mise-à-jour et $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ un fragment caractérisable de la logique propositionnelle. Alors, $[\diamond, \mathcal{L}']$ est l'ensemble de tous les $\diamond$-raffinements de $\mathcal{L}'$.*

Nous pouvons grâce à cette caractérisation définir de nouveaux raffinements.

Definition 8. *Soit $\beta \in \mathcal{B}$. Supposons que $\leq$ est un ordre total fixé sur l'ensemble d'interprétations $2^{\mathcal{U}}$. On définit la fonction* Min_β *comme* $\mathrm{Min}_\beta(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ *si $Cl_\beta(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$, et* $\mathrm{Min}_\beta(\mathcal{M}) = \{\min_\leq(\mathcal{M})\}$ *sinon.*

Pour $\mathcal{L}'$ un β-fragment et $\diamond$ un opérateur de mise-à-jour, l'opérateur correspondant $\diamond^{\mathrm{Min}_\beta}$ est donc défini par $\mathrm{Mod}(\psi \diamond^{\mathrm{Min}_\beta} \mu) = \mathrm{Min}_\beta(\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu))$. Il est clair que, Min_β est une β-application. Donc, en se basant sur la Proposition 2, $\diamond^{\mathrm{Min}_\beta}$ est un $\diamond$-raffinement pour $\mathcal{L}'$.

Example 7. *Reprenons les données des Exemples 2 et 3 avec l'ordre suivant sur les modèles : $\{c,d\} < \{b,c\} < \{a,b,d\}$. Nous avons* $\mathrm{Mod}(\psi \diamond_F \mu) = \{\{b,c\},\{a,b,d\}\}$*, cet ensemble n'est pas clos par intersection. De ce fait, nous obtenons* $\mathrm{Mod}(\psi \diamond_F^{\mathrm{Min}_\beta} \mu) = \{\{b,c\}\}$ *et* $\mathrm{Mod}(\psi \diamond_F^{Cl_\beta} \mu) = \{\{b,c\},\{a,b,d\},\{b\}\}$*. Nous avons également* $\mathrm{Mod}(\psi \diamond_W \mu) = \{\{b,c\},\{c,d\},\{a,b,d\}\}$ *qui n'est pas clos par intersection. Donc, nous obtenons* $\mathrm{Mod}(\psi \diamond_W^{\mathrm{Min}_\beta} \mu) = \{\{c,d\}\}$ *et* $\mathrm{Mod}(\psi \diamond_W^{Cl_\beta} \mu) = \{\{b,c\},\{c,d\},\{a,b,d\},\{b\},\{c\},\{d\},\emptyset\}$.

4 Postulats

Nous étudions dans cette partie quels sont les postulats qui sont préservés ou pas par nos opérateurs raffinés. Nous obtenons tout d'abord un résultat positif. En effet nous montrons que tout opérateur raffiné $\blacklozenge$, préserve les postulats les plus fondamentaux de la mise-à-jour des croyances, à savoir les postulats (U1)-(U4).

Proposition 3. *Soit $\diamond$ un opérateur de mise-à-jour et $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ un fragment caractérisable. Pour $i = 1, \ldots, 4$, si $\diamond$ satisfait le postulat* (Ui)*, alors tout raffinement de cet opérateur, $\blacklozenge \in [\diamond, \mathcal{L}']$, le satisfait également dans $\mathcal{L}'$.*

Démonstration. Puisque $\mathcal{L}'$ est un fragment caractérisable, $\mathcal{L}'$ est un β-fragment pour un certain $\beta \in \mathcal{B}$. Conformément à la Proposition 2 tout opérateur raffiné $\blacklozenge \in [\diamond, \mathcal{L}']$ est un opérateur de la forme $\diamond^{f_\beta}$, où f_β est une β-application. Dans ce qui suit, nous montrons que $\diamond^{f_\beta}$ satisfait (U1)-(U4) pour tout ψ et $\mu \in \mathcal{L}'$.

(U1) : Puisque $\diamond$ satisfait le postulat (U1) nous avons $\psi \diamond \mu \models \mu$. Donc, $\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu) \subseteq \mathrm{Mod}(\mu)$. Par monotonie de la clôture, nous avons $Cl_\beta(\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu)) \subseteq Cl_\beta(\mathrm{Mod}(\mu))$. Or, $\mu \in \mathcal{L}'$ et $\mathcal{L}'$ est unβ-fragment, et donc $Cl_\beta(\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu)) \subseteq \mathrm{Mod}(\mu)$. En se référant à la propriété 2 de la Définition 6, nous avons $f_\beta(\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu)) \subseteq Cl_\beta(\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu))$, et par définition de $\blacklozenge$, nous obtenons $\mathrm{Mod}(\psi \blacklozenge \mu) \subseteq \mathrm{Mod}(\mu)$. D'où, $\psi \blacklozenge \mu \models \mu$, ce qui prouve que $\blacklozenge$ satisfait le postulat (U1).

(U2) : Montrons que si $\psi \models \mu$, alors $\psi \blacklozenge \mu \equiv \psi$. Nous avons par définition $\mathrm{Mod}(\psi \blacklozenge \mu) = f_\beta(\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu))$.

Puisque $\diamond$ satisfait le postulat (U2), si $\psi \models \mu$, alors $\psi \diamond \mu \equiv \psi$, c'est-à-dire $\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu) = \mathrm{Mod}(\psi)$. On a donc $f_\beta(\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu)) = f_\beta(\mathrm{Mod}(\psi))$. Or $\psi \in \mathcal{L}'$, donc $f_\beta(\mathrm{Mod}(\psi)) = \mathrm{Mod}(\psi)$. Ainsi, $\psi \blacklozenge \mu \equiv \psi$.
(U3) : Montrons que si ψ et μ sont satisfaisables, alors $\psi \blacklozenge \mu$ l'est aussi. Nous avons par définition $\mathrm{Mod}(\psi \blacklozenge \mu) = f_\beta(\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu))$. Puisque $\diamond$ satisfait le postulat (U3), alors $\psi \diamond \mu$ est satisfaisable. Autrement dit, $\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu) \neq \emptyset$. D'après la propriété 4 de la Définition 6, nous obtenons $f_\beta(\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu)) \neq \emptyset$. Ainsi, $\psi \blacklozenge \mu$ est satisfaisable.
(U4) : Montrons que si $\psi_1 \equiv \psi_2$ et $\mu_1 \equiv \mu_2$, alors $\psi_1 \blacklozenge \mu_1 \equiv \psi_2 \blacklozenge \mu_2$. Nous avons $\psi_1 \diamond \mu_1 \equiv \psi_2 \diamond \mu_2$ car $\diamond$ satisfait le postulat (U4). Puisque $\blacklozenge$ est un $\diamond$-raffinement, alors d'après la propriété de l'équivalence dans la Définition 4, nous obtenons $\psi_1 \blacklozenge \mu_1 \equiv \psi_2 \blacklozenge \mu_2$. $\square$

La question naturelle qui se pose maintenant est de savoir si on peut trouver des opérateurs raffinés pour des fragments caractérisables, qui satisfont davantage de postulats, voire tous les postulats de mise-à-jour. Nous montrons tout d'abord qu'on ne peut pas espérer généraliser la proposition précédente au postulat (U5). Ceci est fait en considérant plus particulièrement les opérateurs de Forbus et de Winslett que nous raffinons avec la clôture et le $\min$.

Proposition 4. *Les opérateurs raffinés $\diamond_F^{Cl_\beta}$, $\diamond_F^{\mathrm{Min}_\beta}$, $\diamond_W^{Cl_\beta}$ et $\diamond_W^{\mathrm{Min}_\beta}$ violent le postulat (*U5) dans $\mathcal{L}_{Horn}$ et dans $\mathcal{L}_{Krom}$ avec $\beta = \wedge$ et $\beta = \mathrm{maj}_3$ respectivement.

Démonstration. Pour démontrer cette proposition il suffit d'exhiber dans chacun des cas des formules dans le fragment considéré qui attestent que le postulat n'est pas vérifié. Dans toute la preuve $\diamond$ désigne indifféremment l'opérateur de Forbus $\diamond_F$ ou celui de Winslett $\diamond_W$.

Montrons tout d'abord que $\diamond^{Cl_\wedge}$ viole le postulat (U5) dans $\mathcal{L}_{Horn}$ et $\mathcal{L}_{Krom}$. Le même exemple convient pour les deux fragments $\mathcal{L}_{Horn}$ et $\mathcal{L}_{Krom}$. Considérons des formules de Horn (resp. Krom) ψ, μ et ϕ telles que $\mathrm{Mod}(\psi) = \{\{a,b,c\}\}$, $\mathrm{Mod}(\mu) = \{\{a\},\{b\},\{c\},\emptyset\}$, $\mathrm{Mod}(\phi) = \{\{c\},\emptyset\}$ (cet exemple est le même que celui utilisé dans le cadre de la révision dans [4]). Il est facile de vérifier que les ensembles de modèles considérés sont clos à la fois par intersection et par majorité et donc de telles formules de Horn (resp. Krom) existent. Nous constatons que $\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu) = \{\{a\},\{b\},\{c\}\}$ et que cet ensemble n'est pas clos par intersection et donc non représentable par une formule de $\mathcal{L}_{Horn}$. Nous avons donc $\mathrm{Mod}(\psi \diamond^{Cl_\beta} \mu) = \{\{a\},\{b\},\{c\},\emptyset\}$. Nous en déduisons que $\mathrm{Mod}((\psi \diamond^{Cl_\beta} \mu) \wedge \phi) = \{\{c\},\emptyset\}$. Nous obtenons aussi $\mathrm{Mod}(\psi \diamond^{Cl_\beta} (\mu \wedge \phi)) = \{\{c\}\}$. Donc, $(\psi \diamond^{Cl_\beta} \mu) \wedge \phi \not\models \psi \diamond^{Cl_\beta} (\mu \wedge \phi)$, prouvant ainsi que $\diamond_F^{Cl_\beta}$ et $\diamond_W^{Cl_\beta}$ violent le postulat (U5) dans $\mathcal{L}_{Horn}$ et dans $\mathcal{L}_{Krom}$.

Dans un second temps, nous démontrons que $\diamond^{\mathrm{Min}_\beta}$ viole également le postulat (U5) dans $\mathcal{L}_{Horn}$ et $\mathcal{L}_{Krom}$. Le même exemple convient pour les deux fragments $\mathcal{L}_{Horn}$ et $\mathcal{L}_{Krom}$. Considérons des formules de Horn (resp. Krom) ψ, μ et ϕ telles que $\mathrm{Mod}(\psi) = \{\{a,b,c,d,e,f\},\{b,c,d,e,f\}\}$, $\mathrm{Mod}(\mu) = \{\{a,b\},\{c,d\},\{e,f\},\emptyset,\{a,b,c\},\{c\}\}$, $\mathrm{Mod}(\phi) = \{\{a,b\},\{c,d\},\{e,f\},\emptyset\}$ en prenant en considération l'ordre suivant : $\{a,b\} < \{c,d\} < \{e,f\} < \{a,b,c\}$. Il est facile de vérifier que les ensembles de modèles considérés sont clos à la fois par intersection et par majorité et donc de telles formules existent. Nous obtenons d'une part que $\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu) = \{\{c,d\},\{e,f\},\{a,b,c\}\}$ et que cet ensemble n'est ni clos par intersection, ni par majorité. De ce fait, $\mathrm{Mod}(\psi \diamond^{\mathrm{Min}_\beta} \mu) = \{\{c,d\}\}$ et donc $\mathrm{Mod}((\psi \diamond^{\mathrm{Min}_\beta} \mu) \wedge \phi) = \{\{c,d\}\}$. D'autre part, $\mathrm{Mod}(\psi \diamond (\mu \wedge \phi)) = \{\{a,b\},\{c,d\},\{e,f\}\}$, cet ensemble n'est ni clos par intersection, ni par majorité. Donc, $\mathrm{Mod}(\psi \diamond^{\mathrm{Min}_\beta} (\mu \wedge \phi)) = \{\{a,b\}\}$. Il est clair que $\{\{c,d\}\} \not\subseteq \{\{a,b\}\}$. Donc, $(\psi \diamond^{\mathrm{Min}_\beta} \mu) \wedge \phi \not\models \psi \diamond^{\mathrm{Min}_\beta} (\mu \wedge \phi)$. Ceci prouve que $\diamond_F^{\mathrm{Min}_\beta}$ et $\diamond_W^{\mathrm{Min}_\beta}$ violent le postulat (U5) dans $\mathcal{L}_{Horn}$ et dans $\mathcal{L}_{Krom}$. $\square$

Nous avons démontré que $\diamond_F^{\mathrm{Min}_\beta}$ viole le postulat (U5) dans $\mathcal{L}_{Horn}$ et $\mathcal{L}_{Krom}$. Ce résultat mérite d'être souligné puisqu'il marque une différence par rapport à $\circ_D^{\mathrm{Min}_\beta}$, l'opérateur de révision *Dalal* raffiné par la β-application Min_β et analogue à l'opérateur de mise-à-jour $\diamond_F^{\mathrm{Min}_\beta}$, qui lui préserve le postulat de révision (R5) [5].

Pour ce qui est du postulat (U6), la situation est moins tranchée. Comme le montrent les deux propositions suivantes la préservation ou non de (U6) semble étroitement liée à la β-application utilisée pour définir le raffinement.

Proposition 5. *Soit $\diamond$ un opérateur de mise-à-jour et $\mathcal{L}'$ un β-fragment. Si $\diamond$ satisfait (*U6), alors l'opérateur raffiné $\diamond^{Cl_\beta}$ satisfait également le postulat (U6) dans $\mathcal{L}'$.

Démonstration. Montrons que si $(\psi \diamond^{Cl_\beta} \mu_1) \models \mu_2$ et $(\psi \diamond^{Cl_\beta} \mu_2) \models \mu_1$, alors $\psi \diamond^{Cl_\beta} \mu_1 \equiv \psi \diamond^{Cl_\beta} \mu_2$. Si $(\psi \diamond^{Cl_\beta} \mu_1) \models \mu_2$ et $(\psi \diamond^{Cl_\beta} \mu_2) \models \mu_1$, alors par définition $Cl_\beta(\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu_1)) \subseteq \mathrm{Mod}(\mu_2)$ et $Cl_\beta(\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu_2)) \subseteq \mathrm{Mod}(\mu_1)$. Puisque $\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu_1) \subseteq Cl_\beta(\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu_1))$ et $\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu_2) \subseteq Cl_\beta(\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu_2))$, on a $\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu_1) \subseteq \mathrm{Mod}(\mu_2)$ et $\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu_2) \subseteq \mathrm{Mod}(\mu_1)$. Donc, $(\psi \diamond \mu_1) \models \mu_2$ et $(\psi \diamond \mu_2) \models \mu_1$. Or $\diamond$ satisfait (U6), donc $\psi \diamond \mu_1 \equiv \psi \diamond \mu_2$. D'aprés la propriété de l'équivalence dans la Définition 4, nous obtenons $\psi \diamond^{Cl_\beta} \mu_1 \equiv \psi \diamond^{Cl_\beta} \mu_2$. $\square$

Proposition 6. *Les opérateurs raffinés $\diamond_F^{\mathrm{Min}_\beta}$ et $\diamond_W^{\mathrm{Min}_\beta}$ violent le postulat (U6) dans $\mathcal{L}_{Horn}$ et dans $\mathcal{L}_{Krom}$ avec $\beta = \wedge$ et $\beta = \mathrm{maj}_3$ respectivement.*

Démonstration. Dans toute la preuve $\diamond$ désigne indifféremment l'opérateur de Forbus $\diamond_F$ ou celui de Winslett $\diamond_W$.

Commençons par examiner le fragment $\mathcal{L}_{Horn}$. Considérons les formules de Horn ψ, μ_1 et

μ_2 telles que $\mathrm{Mod}(\psi) = \{\{a,b,c,d\},\{b\}\}$, $\mathrm{Mod}(\mu_1) = \{\{a,b\},\{a,c\},\{a\},\{a,b,c,e\}\}$, $\mathrm{Mod}(\mu_2) = \{\{a,b\},\{a,b,c,e\}\}$ avec $\{a,b\} < \{a,c\} < \{a,b,c,e\}$. Ces ensembles de modèles sont clos par intersection et donc de telles formules de Horn existent bien.

Pour faciliter le calcul des résultats de mise-à-jour, dressons le tableau suivant :

	{a,b}	{a,c}	{a}	{a,b,c,e}
{a,b,c,d}	**2** **{c,d}**	**2** **{b,d}**	3 {b,c,d}	**2** **{d,e}**
{b}	**1** **{a}**	3 {a,b,c}	2 {a,b}	3 {a,c,e}

Nous obtenons donc $\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu_1) = \{\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c,e\}\}$ qui n'est pas clos par intersection. De ce fait, $\mathrm{Mod}(\psi \diamond^{\mathrm{Min}_\wedge} \mu_1) = \{\{a,b\}\} \subseteq \mathrm{Mod}(\mu_2)$. D'autre part, $\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu_2) = \{\{a,b\},\{a,b,c,e\}\}$ est clos par intersection, et donc $\mathrm{Mod}(\psi \diamond^{\mathrm{Min}_\wedge} \mu_2) = \{\{a,b\},\{a,b,c,e\}\} \subseteq \mathrm{Mod}(\mu_1)$. Nous constatons que $\mathrm{Mod}(\psi \diamond^{\mathrm{Min}_\wedge} \mu_1) \neq \mathrm{Mod}(\psi \diamond^{\mathrm{Min}_\wedge} \mu_2)$. Donc, $\psi \diamond^{\mathrm{Min}_\wedge} \mu_1 \not\equiv \psi \diamond^{\mathrm{Min}_\wedge} \mu_2$. Ceci montre que $\diamond_F^{\mathrm{Min}_\beta}$ et $\diamond_W^{\mathrm{Min}_\beta}$ violent le postulat (U6) dans $\mathcal{L}_{Horn}$.

Examinons maintenant le fragment $\mathcal{L}_{Krom}$. Prenons des formules de $\mathcal{L}_{Krom}$ telles que $\mathrm{Mod}(\psi) = \{\{a,b,c\}\}$, $\mathrm{Mod}(\mu_1) = \{\{a\},\{b\},\{c\},\emptyset\}$ et $\mathrm{Mod}(\mu_2) = \{\{a\},\{c\}\}$ avec $\{a\} < \{b\} < \{c\}$. Ces ensembles de modèles étant clos par majorité de telles formules existent. D'une part nous obtenons $\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu_1) = \{\{a\},\{b\},\{c\}\}$. Cet ensemble n'est pas clos par majorité, et donc $\mathrm{Mod}(\psi \diamond^{\mathrm{Min}_{\mathrm{maj}_3}} \mu_1) = \{\{a\}\} \subseteq \mathrm{Mod}(\mu_2)$. D'autre part, $\mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu_2) = \{\{a\},\{c\}\}$; Cet ensemble est clos par majorité et donc $\mathrm{Mod}(\psi \diamond^{\mathrm{Min}_{\mathrm{maj}_3}} \mu_2) = \{\{a\},\{c\}\} \subseteq \mathrm{Mod}(\mu_1)$. Nous constatons que $\mathrm{Mod}(\psi \diamond^{\mathrm{Min}_{\mathrm{maj}_3}} \mu_1) \neq \mathrm{Mod}(\psi \diamond^{\mathrm{Min}_{\mathrm{maj}_3}} \mu_2)$. Donc, $\diamond_F^{\mathrm{Min}_\beta}$ et $\diamond_W^{\mathrm{Min}_\beta}$ violent le postulat (U6) dans $\mathcal{L}_{Krom}$. □

Les postulats (U7) et (U8) ne sont quant à eux pas applicables à notre étude car ils font intervenir des disjonctions de formules, or nos fragments ne sont pas clos par disjonction En effet, étant donné deux formules μ_1 et μ_2 appartenant à un β-fragment $\mathcal{L}'$, la disjonction $\mu_1 \vee \mu_2$ n'appartient pas nécessairement à $\mathcal{L}'$. De ce fait cela n'a pas de sens de vérifier si nos opérateurs raffinés, qui se cantonnent à utiliser des formules du fragment, satisfont ces postulats.

Tournons-nous maintenant vers le dernier postulat (U9). Avant cela, énonçons une caractérisation bien utile des formules satisfaisables qui sont complètes.

Proposition 7. *Soit $\mathcal{U}$ un ensemble fini d'atomes. Une formule satisfaisable est complète sur $\mathcal{U}$ si et seulement si elle admet exactement un modèle sur $\mathcal{U}$.*

Démonstration. Montrons dans un premier temps que si une formule propositionnelle satisfaisable ψ est complète sur $\mathcal{U}$, alors ψ admet un seul modèle sur $\mathcal{U}$. Soit ψ une formule satisfaisable et complète. Supposons que ψ admette au moins deux modèles m_1 et m_2 tels que $m_1 \neq m_2$. Soit $\mu \in \mathcal{L}$ tel que $\mathrm{Mod}(\mu) = \{m_1\}$. On a alors $m_1 \notin \mathrm{Mod}(\neg\mu)$. Nous constatons donc que ni l'ensemble des modèles de μ, ni son complémentaire ne contiennent à la fois m_1 et m_2, et donc $\psi \not\models \mu$ et $\psi \not\models \neg\mu$, ce qui fournit une contradiction.

Réciproquement, soit ψ une formule ayant un seul modèle m sur $\mathcal{U}$. Alors pour toute formule $\mu \in \mathcal{L}$ telle que $\mathrm{Var}(\mu) \subseteq \mathcal{U}$, m est soit un modèle de μ soit un modèle de $\neg\mu$. On a donc bien $\psi \models \mu$ ou $\psi \models \neg\mu$. Ainsi, ψ est une formule complète sur $\mathcal{U}$. □

La proposition suivante énonce le fait qu'aucun raffinement des opérateurs de Forbus et de Winslett ne satisfait le postulat (U9).

Proposition 8. *Soit $\diamond \in \{\diamond_F, \diamond_W\}$ et $\mathcal{L}' \in \{\mathcal{L}_{Horn}, \mathcal{L}_{Krom}\}$. Alors, tout raffinement d'opérateur $\blacklozenge \in [\diamond, \mathcal{L}']$ viole le postulat (*U9*) dans $\mathcal{L}'$.*

Démonstration. Considérons en premier lieu le cas où $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_{Horn}$. Puisque $\blacklozenge \in [\diamond, \mathcal{L}']$, il existe une $\wedge$-application f tel que $\blacklozenge = \diamond^f$. Soit ψ et μ deux formules de Horn telles que $\mathrm{Mod}(\psi) = \{a,b,c,d\}$ et $\mathrm{Mod}(\mu) = \{\{a,b\},\{a,c\},\{a\},\{a,b,e\},\{a,b,c,e\}\}$. Observons que ces ensembles de modèles sont clos par intersection et donc de telles formules ψ et μ de Horn existent bien.

Nous avons $\mathcal{M} = \mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu) = \{\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c,e\}\}$ (voir Table 3). Observons que $Cl_\wedge(\mathcal{M}) = \{\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c,e\},\{a\}\}$. Examinons les différentes possibilités de $\mathrm{Mod}(\psi \blacklozenge \mu) = f(\mathcal{M})$.

Puisque f est une $\wedge$-application, $f(\mathcal{M}) \subseteq Cl_\wedge(\mathcal{M})$. De ce fait, $\{a,b,e\} \notin f(\mathcal{M})$. Nous distinguons deux cas possibles : ou bien $\{a\} \in f(\mathcal{M})$ ou bien non.

Si $\{a\} \in f(\mathcal{M})$, prenons une formule ϕ telle que $\mathrm{Mod}(\phi) = \{\{a\},\{a,b,e\}\}$. Il est clair que ϕ existe bien dans $\mathcal{L}_{Horn}$. Notons bien aussi que $\mathrm{Mod}(\phi) \subseteq \mathrm{Mod}(\mu)$. Nous obtenons donc d'une part $\mathrm{Mod}(\psi \blacklozenge (\mu \wedge \phi)) = \mathrm{Mod}(\psi \blacklozenge \phi) = f(\mathrm{Mod}(\psi \diamond \phi)) = f(\{\{a\},\{a,b,e\}\}) = \{\{a\},\{a,b,e\}\}$ car $\{\{a\},\{a,b,e\}\}$ est clos par intersection. D'autre part, $\mathrm{Mod}((\psi \blacklozenge \mu) \wedge \phi) = f(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Mod}(\phi) = \{\{a\}\}$.

Si $\{a\} \notin f(\mathcal{M})$. Puisque $f(\mathcal{M}) \neq \emptyset$ et que $f(\mathcal{M})$ est clos par intersection, par symétrie du rôle joué par les variables b et c, il suffit alors d'examiner trois possibilités pour $f(\mathcal{M})$: ou bien $f(\mathcal{M}) = \{\{a,b\}\}$ ou $f(\mathcal{M}) = \{\{a,b,c,e\}\}$ ou $f(\mathcal{M}) = \{\{a,b\},\{a,b,c,e\}\}$. Si $f(\mathcal{M}) = \{\{a,b\}\}$ ou $f(\mathcal{M}) = \{\{a,b,c,e\}\}$, choisissons la formule ϕ telle que $\mathrm{Mod}(\phi) = \{\{a,b\},\{a,b,c,e\}\}$. Il est clair que ϕ existe bien dans $\mathcal{L}_{Horn}$. Nous obtenons donc $\mathrm{Mod}(\psi \blacklozenge (\mu \wedge \phi)) = \{\{a,b\},\{a,b,c,e\}\}$, tandis que $\mathrm{Mod}((\psi \blacklozenge \mu) \wedge \phi) = f(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Mod}(\phi) = f(\mathcal{M})$. Supposons maintenant que $f(\mathcal{M}) = \{\{a,b\},\{\{a,b,c,e\}\}$. Choisissons la formule ϕ dans $\mathcal{L}_{Horn}$ telle que $\mathrm{Mod}(\phi) = \{\{a,c\},\{a,b,c,e\}\}$. Nous constatons que $\mathrm{Mod}(\psi \blacklozenge (\mu \wedge$

$Mod(\psi)$	$Mod(\mu)$				
	{a,b}	{a,c}	{a}	{a,b,e}	{a,b,c,e}
{a,b,c,d}	**2** **{c,d}**	**2** **{b,d}**	3 $\{b,c,d\}$	3 $\{c,d,e\}$	**2** **{d,e}**

TABLE 3 – Violation du postulat (U9) par tout raffinement de $\diamond_F$ et $\diamond_W$ dans $\mathcal{L}_{Horn}$

$\phi)) = \{\{a,c\},\{a,b,c,e\}\}$. Cependant, $\mathrm{Mod}((\psi\blacklozenge\mu) \wedge \phi) = f(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Mod}(\phi) = \{\{a,b,c,e\}\}$. Ainsi, dans tous les cas $\mathrm{Mod}((\psi\blacklozenge\mu) \wedge \phi) \neq \emptyset$ et $\mathrm{Mod}(\psi\blacklozenge(\mu \wedge \phi)) \not\subseteq \mathrm{Mod}((\psi\blacklozenge\mu) \wedge \phi)$. Ceci prouve bien que $\psi\blacklozenge(\mu \wedge \phi) \not\models (\psi\blacklozenge\mu) \wedge \phi$ dans $\mathcal{L}_{Horn}$.

Vérifions maintenant que l'exemple suivant convient pour $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_{Krom}$. Prenons des formules de $\mathcal{L}_{Krom}$ telles que $\mathrm{Mod}(\psi) = \{\{a,b,c,d,e\}\}$ et $\mathrm{Mod}(\mu) = \{\{a,b,c\},\{b,c,d\},\{b,c,e\},\{b,c\},\{a,b\}\}$. Il est facile de vérifier que ces ensembles de modèles sont clos par majorité et donc de telles formules ψ et μ de Krom existent bien. Nous dressons la Table 4.

Nous avons $\mathcal{M} = \mathrm{Mod}(\psi \diamond \mu) = \{\{a,b,c\},\{b,c,d\},\{b,c,e\}\}$. Observons que $Cl_{\mathrm{maj}_3}(\mathcal{M}) = \{\{a,b,c\},\{b,c,d\},\{b,c,e\},\{b,c\}\}$. Examinons les différentes possibilités pour $\mathrm{Mod}(\psi\blacklozenge\mu) = f(\mathcal{M})$. Notons bien que $\{a,b\} \notin f(\mathcal{M})$.

Considérons d'abord le cas où $\{b,c\} \in f(\mathcal{M})$. Prenons alors une formule ϕ telle que $\mathrm{Mod}(\phi) = \{\{b,c\},\{a,b\}\}$, une telle formule existe bien dans $\mathcal{L}_{Krom}$. Notons bien aussi que $\mathrm{Mod}(\phi) \subseteq \mathrm{Mod}(\mu)$. Nous constatons d'une part que $\mathrm{Mod}(\psi\blacklozenge(\mu \wedge \phi)) = \mathrm{Mod}(\psi\blacklozenge\phi) = f(\mathrm{Mod}(\psi \diamond \phi)) = \{\{b,c\},\{a,b\}\}$, et d'autre part, $\mathrm{Mod}((\psi\blacklozenge\mu) \wedge \phi) = \{\{b,c\}\}$.

Tournons-nous maintenant vers le cas où $\{b,c\} \notin f(\mathcal{M})$. Puisque $f(\mathcal{M}) \neq \emptyset$ et que $f(\mathcal{M})$ est clos par majorité, par symétrie du rôle joué par d et e, il suffit de considérer trois cas : $f(\mathcal{M}) = \{\{a,b,c\},\{b,c,d\}\}$ ou $f(\mathcal{M}) = \{\{a,b,c\}\}$ ou $f(\mathcal{M}) = \{\{b,c,d\}\}$. Si $f(\mathcal{M}) = \{\{a,b,c\},\{b,c,d\}\}$, nous considérons la formule ϕ telle que $\mathrm{Mod}(\phi) = \{\{a,b,c\},\{b,c,e\}\}$ qui existe bien dans $\mathcal{L}_{Krom}$. En se basant sur la Table 4, nous constatons que $\mathrm{Mod}(\psi\blacklozenge(\mu \wedge \phi)) = \{\{a,b,c\},\{b,c,e\}\}$. En revanche, $\mathrm{Mod}((\psi\blacklozenge\mu) \wedge \phi) = f(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Mod}(\phi) = \{\{a,b,c\}\}$. Finalement, si $f(\mathcal{M}) = \{\{a,b,c\}\}$ ou $f(\mathcal{M}) = \{\{b,c,d\}\}$, alors nous prenons ϕ dans $\mathcal{L}_{Krom}$ telle que $\mathrm{Mod}(\phi) = \{\{a,b,c\},\{b,c,d\}\}$. Nous obtenons donc $\mathrm{Mod}(\psi\blacklozenge(\mu \wedge \phi)) = \{\{a,b,c\},\{b,c,d\}\}$. Cependant, $\mathrm{Mod}((\psi\blacklozenge\mu) \wedge \phi) = f(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Mod}(\phi) = f(\mathcal{M})$. Il est bien évident que $\mathrm{Mod}((\psi\blacklozenge\mu) \wedge \phi) \neq \emptyset$ et $\mathrm{Mod}(\psi\blacklozenge(\mu \wedge \phi)) \not\subseteq \mathrm{Mod}((\psi\blacklozenge\mu) \wedge \phi)$ dans les différents cas discutés. Ce qui prouve bien que $\psi\blacklozenge(\mu \wedge \phi) \not\models (\psi\blacklozenge\mu) \wedge \phi$ dans $\mathcal{L}_{Krom}$. □

5 Conclusion

Cet article s'inscrit dans la direction de recherche actuelle sur le changement de croyances dans des fragments de la logique propositionnelle. A notre connaissance les travaux ont porté jusqu'à présent essentiellement sur la révision et la contraction, mais pas sur la mise-à-jour. Nous avons proposé dans cet article une approche pour adapter les opérateurs de mise-à-jour afin qu'ils puissent opérer sur les fragments caractérisables de la logique propositionnelle. La caractérisation des opérateurs raffinés nous a permis d'étudier leurs propriétés logiques en terme de satisfaction des postulats de Katsuno et Mendelzon (KM) pour la mise-à-jour. Nous avons montré que les opérateurs raffinés préservent les postulats de base (U1)-(U4). Nous nous sommes ensuite plus particulièrement intéressés aux opérateurs de Forbus et Winslett dans les fragments de Horn et de Krom. Nous avons montré que le postulat (U5) est violé par les opérateurs raffinés que nous avons considérés. Ce résultat est intéressant car il met en évidence une différence de comportement entre l'opérateur de Forbus et son analogue pour la révision, l'opérateur de Dalal. Par ailleurs, il pose la question de savoir si ce postulat est violé par tout opérateur de mise-à-jour raffiné. En ce qui concerne le postulat (U6), nous avons montré que la situation est moins tranchée puisque certains opérateurs raffinés satisfont ce postulat, alors que d'autres le violent. Il serait intéressant dans l'avenir de caractériser les opérateurs raffinés qui satisfont ce postulat. Nous avons également montré qu'aucun raffinement des opérateurs de Forbus et Winslett ne satisfait le postulat (U9).

Nous avons considéré les fragments de Horn et de Krom, une étude du fragment affine est en cours. Par ailleurs, l'étude de la complexité des opérateurs de mise-à-jour raffinés fera l'objet de futurs travaux. Enfin, nous envisageons de continuer notre étude pour d'autres opérateurs de changement de croyances, notamment la contraction.

Références

[1] C.E. Alchourrón, P. Gärdenfors, and D. Makinson. On the logic of theory change : Partial meet contraction and revision functions. *Journal of Symbolic Logic*, 50 :510–530, 1985.

[2] R. Booth, T.A. Meyer, I.J. Varzinczak, and R. Wassermann. On the link between partial meet, kernel, and

$Mod(\psi)$	$Mod(\mu)$				
	{a,b,c}	{b,c,d}	{b,c,e}	{b,c}	{a,b}
{a,b,c,d,e}	**2** **{d,e}**	**2** **{a,e}**	**2** **{a,d}**	3 $\{a,d,e\}$	3 $\{c,d,e\}$

TABLE 4 – Violation du postulat (U9) par tout raffinement de $\diamond_F$ et $\diamond_W$ dans $\mathcal{L}_{Krom}$

infra contraction and its application to Horn logic. *J. Artif. Intell. Res. (JAIR)*, 42 :31–53, 2011.

[3] C. Boutilier. A unified model of qualitative belief change : A dynamical systems perspective. *Artif. Intell.*, 98(1-2) :281–316, 1998.

[4] N. Creignou, O. Papini, R. Pichler, and S. Woltran. Belief revision within fragments of propositional logic. *J. Comput. Syst. Sci.*, 80(2) :427–449, 2014. (Preliminary version in Proc. KR'12 (2012)).

[5] M. Dalal. Investigations into theory of knowledge base revision. In *Proc. AAAI*, pages 449–479, St. Paul, Minnesota, 1988.

[6] A. del Val and Y. Shoham. A unified view of belief revision and update. *J. Log. Comput.*, 4(5) :797–810, 1994.

[7] J.P. Delgrande, Y. Jin, and F.J. Pelletier. Compositional belief update. *CoRR*, abs/1401.3431, 2014.

[8] J.P. Delgrande and P. Peppas. Revising Horn theories. In *Proc. IJCAI*, pages 839–844, 2011.

[9] J.P. Delgrande and R. Wassermann. Horn clause contraction functions. *J. Artif. Intell. Res. (JAIR)*, 48, 2013.

[10] P. Doherty, W. Lukaszewicz, and E. Madalinska-Bugaj. The pma and relativizing minimal change for action update. *Fundam. Inform.*, 44(1-2) :95–131, 2000.

[11] D. Dubois and H. Prade. Belief revision and updates in numerical formalisms : An overview, with new results for the possibilistic framework. In *Proc. IJCAI*, pages 620–625, 1993.

[12] T. Eiter and G. Gottlob. On the complexity of propositional knowledge base revision, updates, and counterfactuals. *Artif. Intell.*, 57(2-3) :227–270, 1992.

[13] R. Fagin, J. D. Ullman, and M. Y. Vardi. On The Semantic of Updates in Databases. In *Proc. of the 2nd ACM Symp. on Principles of Data Base Systems*, pages 352–365, 1983.

[14] K.D. Forbus. Introducing actions into qualitative simulation. In *Proc. IJCAI*, pages 1273–1278, 1989.

[15] N. Friedman and J.Y. Halpern. Modeling belief in dynamic systems, part II : Revision and update. *J. Artif. Intell. Res. (JAIR)*, 10 :117–167, 1999.

[16] A. Herzig and O. Rifi. Propositional belief base update and minimal change. *Artif. Intell.*, 115(1) :107–138, 1999.

[17] A. Horn. On sentences which are true of direct unions of algebras. *Journal of Symbolic Logic*, 16 :14–21, 1951.

[18] H. Katsuno and A.O. Mendelzon. Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artif. Intell*, 52(3) :263–294, 1991.

[19] H. Katsuno and A.O. Mendelzon. On the difference between updating a knowledge base and revising it. In P. Gärdenfors, editor, *Belief revision*, pages 183–203. Cambridge University Press, 1992. (Preliminary version in Proc. KR'91 (1991)).

[20] A.M. Keller and M. Winslett. On the use of an extended relational model to handle changing incomplete information. *IEEE Trans. Software Eng.*, 11(7) :620–633, 1985.

[21] J. Lang. Belief update revisited. In *Proc. IJCAI*, pages 2517–2522, 2007.

[22] P. Liberatore and M. Schaerf. Belief revision and update : Complexity of model checking. *J. Comput. Syst. Sci.*, 62(1) :43–72, 2001.

[23] F. Van De Putte. Prime implicates and relevant belief revision. *J. Log. Comput.*, 23(1) :109–119, 2013.

[24] T.J. Schaefer. The complexity of satisfiability problems. In *Proc. STOC*, pages 216–226. ACM Press, 1978.

[25] M. Winslett. Reasoning about action using a possible models approach. In *Proc. AAAI*, pages 89–93, 1988.

[26] Y. Zhang and N.Y. Foo. Updates with disjunctive information : From syntactical and semantical perspectives. *Computational Intelligence*, 16(1) :29–52, 2000.

[27] Z.Q. Zhuang and M. Pagnucco. Model based Horn contraction. In *Proc. KR*, pages 169–178, 2012.

[28] Z.Q. Zhuang, M. Pagnucco, and Y. Zhang. Definability of Horn revision from Horn contraction. In *Proc. IJCAI*, 2013.