Mise à jour de pré-ordres basée sur la consistance pour estimer la fiabilité relative de sources d'informations

L. Cholvy[1] **L. Perrussel**[2] **W. Raynaut**[1] **J-M. Thévenin**[2]

[1] ONERA, 2 av Ed Belin, 31055 Toulouse, France

[2] Université Toulouse 1 Capitole, 2 rue du doyen Gabriel Marty 31042 Toulouse, France

{cholvy,raynaut}@onera.fr {perrussel, thevenin}@univ-tlse1.fr

Résumé

Certaines méthodes de fusion d'informations supposent que les sources d'informations sont ordonnées en fonction de leur fiabilité relative et donnent plus d'importance aux informations provenant de sources plus fiables. Dans cet article, nous nous plaçons en amont de ces processus de fusion et nous nous intéressons à la phase d'estimation de la fiabilité relative des sources, modélisée ici par un pré-ordre total. Nous voyons cette phase comme une phase de mise à jour qui à partir d'un pré-ordre initial représentant l'a priori que l'utilisateur peut avoir sur la fiabilité relative des sources, construit un nouveau pré-ordre en utilisant uniquement les informations émises par les sources durant cette phase. La propriété majeure qui est exploitée est la consistance de ces informations émises vis à vis notamment d'informations considérées comme certaines. Les contributions de cet article sont d'une part, un ensemble de postulats qui caractérisent ces opérateurs de mise-à-jour, et d'autre part des opérateurs de mise-à-jour particuliers dont on discute la conformité vis à vis de ces postulats.

Abstract

Some methods of information merging suppose that information sources are ordered according to their relative reliability. They thus give more importance to information which are provided by more reliable sources. In this paper, we adress the question of estimating this relative relability, modelling it here by a total pre-order. We emphasize a process which starts from an a priori total pre-order and updates it by exploiting the information which are reported by the sources during this phase. The main property which is used is the consistency of reported information according to some trusted information. This paper provides a set of postulates which characterizes such updating process and provides also particular updating operators the conformity of which is studied.

1 Motivations

En fusion d'informations, la fiabilité des sources d'informations est souvent un élément essentiel utilisé par le processus de fusion notamment lorsque les informations à fusionner sont contradictoires. En effet, en cas de contradictions entre informations, il est naturel de donner la priorité aux informations produites par la source la plus fiable.

Il y a cependant différentes façons de représenter cette fiabilité. On peut représenter la fiabilité des sources d'informations de façon quantitative, on parle alors de degrés de fiabilité, et utiliser ces degrés dans le processus de fusion. C'est ce qui est fait par exemple dans la théorie des fonctions de croyances où le degré de fiabilité d'une source est modélisé par un réel, compris entre 0 et 1, et utilisé pour réduire, dans le processus de fusion, l'importance des croyances émises par la source [15]. C'est le cas également de [6], qui utilise la théorie des possibilités et propose de paramétrer le processus de fusion par les degrés de fiabilités des sources.

On peut aussi représenter la fiabilité relative des sources et utiliser ensuite dans le processus de fusion cet ordre ou pré-ordre. Par exemple, [3] et [4] proposent un opérateur de fusion qui suppose que les sources sont ordonnées selon un ordre total représentant leur fiabilité relative. Dans ce travail, si la source s est plus fiable que la source s' (noté $s > s'$) et si les deux sources émettent des informations contradictoires, le processus de fusion prendra en compte en priorité les informations fournies par s. Les informations fournies par s' qui ne contredisent pas celles de s seront ensuite prises en compte. Cette même idée est reprise dans [12] pour raisonner avec des croyances plus complexes et dans [14] pour réviser une base de croyances en prenant en compte le niveau de fiabilité relative des sources signant (i.e., rapportant) les informations considérées. Dans [5], cette idée est généralisée et les sources sont ordonnées selon plusieurs ordres représentant leurs fiabilités relatives dans différents thèmes. [10] et [11] supposent quant à eux, que l'on classe, selon un pré-ordre, non pas les sources d'informations mais des ensembles de sources d'informations. Ainsi $S \geq S'$ signifiera que j'ai une plus grande confiance dans le fait qu'une source de S donnera des informations vraies que dans le fait qu'une source de S' le fasse. L'objectif de ces travaux est de proposer comment on peut exploiter ces pré-ordres pour déduire la confiance que l'on peut avoir dans les informations émises par les sources.

Notons cependant que les travaux cités précédemment, s'ils utilisent la fiabilité relative des sources pour la fusion, ne s'intéressent pas à savoir comment on peut déterminer cette fiabilité relative. Il faut se tourner vers d'autres travaux, dans le domaine des systèmes multi-agents essentiellement, qui eux s'intéressent à la question de l'élaboration de la confiance (trust assessment). Dans ce domaine, différentes définitions de la confiance et différentes approches pour l'élaborer sont préconisées [8]. Ainsi, [9] montre comment assigner la fiabilité relative des sources d'informations en utilisant deux variables appelées respectivement niveau de connaissances de la source et niveau d'expertise de la source. Ces deux variables ont pour but de quantifier le degré de compétence de la source pour délivrer des informations vraies. Dans le même ordre d'idée [7] montre que la confiance dans le fait qu'une source d'information délivre des informations vraies se définit à partir de la confiance que l'on peut avoir dans sa compétence (ce que pense la source est vraie) et sa sincérité (la source pense ce qu'elle dit). Mais pour élaborer ces paramètres ou estimer directement un degré de confiance, il existe différentes approches. Ainsi, l'évaluateur peut utiliser les expériences qu'il a eues dans le passé avec l'agent dont il veut déterminer la fiabilité (on parle de "trust interaction") ; l'évaluateur peut collecter les avis que d'autres agents peuvent avoir au sujet de la fiabilité de l'agent dont il veut déterminer la fiabilité (on parle de "witness reputation") ; l'évaluateur peut prendre en compte les relations qui existent entre les agents du système, l'organisation dans laquelle ces agents jouent des rôles (on parle de "role-based trust") ; et enfin, l'agent dont on veut évaluer la fiabilité peut produire lui-même des preuves certifiées de sa fiabilité (on parle de certified reputation).

Dans ce travail, nous nous intéressons à la phase, que l'on pourrait appeler "phase d'apprentissage de la fiabilité", qui précède la phase de fusion d'informations et qui a pour objet de mettre à jour le pré-ordre a priori (lequel peut au pire considérer toutes les sources de même fiabilité) pour produire le pré-ordre de fiabilité relative des sources d'informations qui sera lui, exploité dans la fusion. Nous prenons comme hypothèse de travail que c'est en observant et en analysant ce que rapportent les sources d'informations durant cette phase que nous pouvons détecter si une source est plus fiable qu'une autre et ainsi élaborer le pré-ordre. Plus précisément, en supposant la donnée d'informations de confiance, on analysera la consistance, vis à vis de ces informations certaines, des informations produites par les sources (consistance d'une information fournie par une source, ou consistance de plusieurs informations fournies par plusieurs sources).

Prenons par exemple le cas d'un agent qui regarde la météo sur les différentes chaînes de sa télévision. Il commence par les chaînes nationales, France 2 et la chaîne météo annoncent du beau temps pour la région de l'agent tandis que TF1 y prévoit des orages. Une attitude possible de l'agent est de réviser à la baisse la confiance qu'il accordait à TF1 puisque celle-ci contredit les deux autres grandes chaines. Puis il zappe sur sa chaîne locale, Télé Millevaches, où l'on annonce de la pluie. Il regarde alors par la fenêtre et constate un ciel parfaitement dégagé. Il en conclut que sa chaîne locale ne vérifie pas les informations qu'elle divulgue puisque de façon certaine, il fait beau. L'agent va alors réduire considérablement la confiance qu'il portait à cette chaine locale.

L'approche suivie dans ce travail est une approche assez classique. Dans un premier temps, nous listons les postulats qui caractérisent de façon axiomatique de tels opérateurs de mise-à-jour de pré-ordres, puis dans un deuxième temps nous proposons des opérateurs de mise-à-jour.

Cet article est organisé de la façon suivante. La section 2 présente les postulats en question, la section 3 présente des opérateurs de mise-à-jour et s'intéresse à la conformité de ces opérateurs vis à vis des postulats. La section 4 présente un exemple qui illustre un de ces opérateurs particulier. La section 6 conclut cet article et discute des différentes perspectives possibles.

2 Caractériser la construction de la fiabilité relative

Cette section présente les postulats qui caractérisent de façon axiomatique les opérateurs de mise-à-jour de pré-ordres qui modélisent le processus d'apprentissage de la fiabilité relative des sources d'informations.

Nous donnons tout d'abord quelques définitions préliminaires.

2.1 Définitions préliminaires

- On considère une logique propositionnelle dont le langage L est défini par un ensemble énumérable de lettres propositionnelles $P = \{p, q...\}$. On note $\vdash$ la relation d'inférence associée.
- On considère un ensemble A d'*agents* (les sources d'informations).
- Soit $\leq$ un pré-ordre total sur A. $PF(a, \leq) = \{x \in A \setminus \{a\} : a \leq x\}$ est l'ensemble des agents qui sont supérieurs à a. Ainsi, si $\leq$ exprime la fiabilité relative des agents, alors $PF(a, \leq)$ est l'ensemble des agents considérés au moins aussi fiables que a.
- Un *ensemble de communications sur* A est un ensemble de paires de la forme $< a, \varphi >$ où $a \in A$ et φ une formule de L ; la paire $< a, \varphi >$ signifie "l'agent a a dit φ". Etant donné un ensemble de communications Ψ, on définit *l'ensemble des communications de l'agent* a par : $\Psi_a = \{< a, \varphi >:< a, \varphi >\in \Psi\}$.
- Soient Ψ et Ψ' deux ensembles de communications. On dit que Ψ et Ψ' sont équivalents si et seulement si pour tout agent a : $\vdash (\bigwedge_{<a,\varphi>\in\Psi} \varphi) \leftrightarrow (\bigwedge_{<a,\varphi>\in\Psi'} \varphi)$. On note $\Psi \equiv \Psi'$.
- Dans la suite, on note Ψ un ensemble de communications et IC un ensemble consistant de formules de L qui représente des *informations considérées comme certaines.*
- On dit que Ψ *est* IC*-consistant* (resp, IC*-inconsistant*) ssi $\bigwedge_{<x,\varphi>\in\Psi} \varphi \wedge IC$ est consistant (resp, inconsistant).
- On dit que Ψ *est minimal* IC*-inconsistant* ssi Ψ est IC-inconsistant et il n'existe pas de sous-ensemble de Ψ qui soit IC-inconsistant.
- On note $\Psi \perp IC$ *l'ensemble des sous-ensembles de* Ψ *qui sont minimaux* IC*-inconsistants.*
- On dit que *l'agent* a *est* IC*-inconsistant* ssi $\bigwedge_{<a,\varphi>\in\Psi} \varphi \wedge IC$ est inconsistant.
- On dit que *l'ensemble d'agents* $\{a_1, ...a_k\}$ *est* IC*-inconsistant* ssi $\bigwedge_{<a_1,\varphi>\in\Psi} \varphi \wedge .... \bigwedge_{<a_k,\varphi>\in\Psi} \varphi \wedge IC$ est inconsistant
- Soit $E \subset A$ un ensemble d'agents. E est *minimal* IC*-inconsistant* ssi il est IC-inconsistant et s'il n'existe pas de sous ensemble de E qui soit IC-inconsistant.
- Soit $a \in A$. $Index(a) = \{\varphi : \exists EI \in \Psi \perp IC, < a, \varphi >\in EI\}$. Selon cette définition, l'index d'un agent est l'ensemble des informations qu'il a communiquées et qui sont, étant donnée IC, minimalement contradictoires avec d'autres informations communiquées (par lui même ou par d'autres agents).
- Soit $A^\perp = \{a \in A : Index(a) \neq \emptyset\}$. $A^\perp$ est donc l'ensemble des agents qui ont émis une information contradictoire (que ce soit avec d'autres informations communiquées ou bien directement avec IC).

2.2 Les postulats

L'objectif de cette section est de mettre en évidence des postulats de rationalité qui caractérisent l'opérateur Γ qui, étant donné un ensemble de communications Ψ, étant donné un pré-ordre total initial $\leq$ sur A et étant donné les informations certaines IC, construit un nouveau pré-ordre total, noté $\Gamma_{IC}(\Psi, \leq)$ représentant la fiabilité relative attribuée aux agents de A, étant donné leurs communications et étant donné un pré-ordre total a priori. Les postulats sont :

P1 $\Gamma_{IC}(\Psi, \leq)$ est un pré-ordre total sur A.

P2 Si $\Psi \equiv \Psi'$ alors $\Gamma_{IC}(\Psi, \leq) = \Gamma_{IC}(\Psi', \leq)$

P3 Si $\vdash IC \leftrightarrow IC'$ alors $\Gamma_{IC}(\Psi, \leq) = \Gamma_{IC'}(\Psi, \leq)$

P4 Si $\Psi_a = \emptyset$ alors $\Gamma_{IC}(\Psi, \leq) = \Gamma_{IC}(\Psi \setminus \Psi_a, \leq)$

P5 Si Ψ est IC-consistant alors $\Gamma_{IC}(\Psi, \leq) =\leq$

P6 Si $\{a_1, ..., a_k\}$ $(k \geq 2)$ est un ensemble d'agents minimal IC-inconsistant, alors il existe i tel que pour tout $j \neq i$, $PF(a_j, \Gamma_{IC}(\Psi, \leq)) \subset PF(a_i, \Gamma_{IC}(\Psi, \leq))$.

P7 Si a est un agent IC-inconsistant alors $A \setminus A^\perp \subseteq PF(a, \Gamma_{IC}(\Psi, \leq))$

P1 spécifie que le résultat de la mise-à-jour d'un pré-ordre total est un pré-ordre total. Autrement dit, si toutes les sources ont été classées a priori selon un pré-ordre de fiabilité relative, alors le résulat de la phase d'apprentissage est aussi un pré-ordre de fiabilité relative.

Les postulats **P2** et **P3** traitent de l'indépendance à la syntaxe. Plus précisément, selon **P2**, les résultats de l'application de Γ_{IC} sur deux ensembles de communications équivalents et un pré-ordre total donné, sont identiques. Et selon **P3**, le pré-ordre total construit à partir d'un ensemble de communications et un pré-ordre total initial est le même si l'on considère des formules certaines équivalentes.

P4 traite le cas des sources d'informations qui ne rapportent aucune information. Selon ce postulat, un agent qui ne dit rien n'est pas exploité pour remettre en cause la fiabilité relative des agents.

P5 traite le cas où les sources d'informations ne sont pas inconsistantes. Selon ce postulat, si toutes les informations émises par les sources sont consistantes avec IC alors le pré-ordre résultant est identique au pré-ordre total initial. Autrement dit, la consistance des informations produites ne remet pas en cause la fiabilité relative des sources.

P6 quant à lui traite du cas où les sources d'informations sont inconsistantes. Selon ce postulat, si des agents disent des choses contradictoires vis à vis de IC et ce de façon minimale, alors l'un au moins des agents verra sa fiabilité révisée à la baisse strictement.

P7 traite le cas des agents qui émettent des informations contradictoires avec IC. D'après ce postulat un agent qui émet une information contredisant IC sera considéré comme au plus aussi fiable que tout autre agent qui n'aurait pas émis d'informations contradictoires.

3 Des opérateurs de mise-à-jour du pré-ordre

Dans cette section, après avoir donné quelques définitions préliminaires, nous présentons un opérateur de mise-à-jour générique et nous étudions sa conformité vis à vis des postulats. Nous terminons en donnant une instance particulière de cet opérateur.

3.1 Définitions préliminaires

On considère Ψ un ensemble de communications et IC un ensemble consistant de formules de L.

– Soient $a \in A^{\perp}$ et $b \in A^{\perp}$. On définit : $a \preceq b \iff |Index(a)| \leq |Index(b)|$. La quantification numérique nous assure que $\preceq$ est un pré-ordre total sur $A^{\perp}$. Selon ce pré-ordre, les agents maximum sont ceux qui ont communiqué le plus d'informations impliquées dans une contradiction.

– Soit $\oplus$ un opérateur binaire d'aggrégation de pré-ordres totaux sur A et notons $\leq_{x \oplus y}$ l'aggrégation des deux pré-ordres totaux $\leq_x \oplus \leq_y$. On dira que $\oplus$ est un opérateur d'agrégation *arbitraire à gauche* si et seulement s'il respecte les trois propriétés :

  1. $\leq_{x \oplus y}$ est un pré-ordre total sur A.
  2. Si $\forall\, a, b \in A,\ a =_x b$, alors, $\leq_{x \oplus y} = \leq_y$.
  3. $\forall\, a, b \in A,\ a <_x b \Rightarrow a <_{x \oplus y} b$

  Nous rejoignons ici le domaine de l'aggrégation de préférences et du choix social, dont un élément central est le théorème d'Arrow [1]. Ce dernier stipule qu'il n'existe pas de fonction de choix social (ici d'aggrégation de préordres) satisfaisant simultanément les quatre propriétés d'Universalité, Non-dictature, Unanimité et Indifférence des Options Non-Pertinentes. Il s'agit là d'un domaine très riche, et [13] et [2] en particulier traitent des différentes relaxations permettant d'aboutir à différentes fonctions de choix social. Notons que pour définir les opérateurs *arbitraires à gauche* présentés ci-dessus, nous avons relaxé la condition de non-dictature, ce qui s'avère, en passant, être le cas le moins étudié dans la littérature.

3.2 Définition d'un opérateur générique

L'opérateur générique que nous définissons suppose un ensemble de communication Ψ, un ensemble consistant de formules IC et un opérateur d'agrégation *arbitraire à gauche* $\oplus$. Il prend en entrée un pré-ordre total initial sur A noté $\leq$ et il construit, en deux phases successives, un pré-ordre total sur A, noté $\Gamma^{\oplus}_{IC,\Psi}(\leq)$, représentant le résultat de la mise à jour du pré-ordre initial. Les deux phases sont :

1. Dans un première phase, on suppose toutes les sources de même fiabilité, et on construit, par une fonction appelée $\text{RefineReliability}_{\text{IC}}$ et décrite ci-après un pré-ordre total en considérant comme éléments minimaux, les agents qui émettent des informations contradictoires ou contradictoires avec IC, et en déclassant les agents qui émettent le plus de communications qui contredisent d'autres communications.

   Notons $\text{RefineReliability}_{\text{IC}}(\Psi)$ le pré-ordre total produit à l'issue de cette phase.
2. Dans une deuxième phase, RefineReliability$_{\text{IC}}(\Psi)$ est agrégé au pré-ordre initial $\leq$ à l'aide de $\oplus$. C'est à dire :

$$\Gamma^{\oplus}_{IC,\Psi}(\Phi, \leq) = \text{RefineReliability}_{\text{IC}}(\Psi) \oplus \leq$$

La fonction $\text{RefineReliability}_{\text{IC}}$ est définie par :

Algorithm 1 *Opérateur de raffinement de la fiabilité*

function $\text{RefineReliability}_{\text{IC}}(\Psi)$
  $E^0 \leftarrow \Psi \perp IC$
  $A^0 \leftarrow A$
  $\leq^0 \leftarrow \{a \leq^0 b \mid a, b \in A\}$
  $i \leftarrow 0$
  for all $b \in A^i$ t.q. b est IC-inconsistant **do**
    $\leq^{i+1} \leftarrow \leq^i - \{a \leq^i b \mid a \in A^i$ et a est IC-consistant$\}$
    $E^{i+1} \leftarrow E^i - \{EI \mid EI \in E^i$ et $\exists \phi :< b, \phi > \in EI\}$
    $A^{i+1} \leftarrow A^i - \{b\}$
    $i \leftarrow i + 1$
  end for
  repeat

```
13:         Choisir b ∈ max(A^i, ⪯)
14:         ≤^{i+1} ← ≤^i −{a ≤^i b | a ∈ A^i − {b}}
15:         E^{i+1} ← E^i − {EI | EI ∈ E^i et ∃ < b, φ >∈ EI}
16:         A^{i+1} ← A^i − {b}
17:         i ← i + 1
18:     until E^i = ∅
19:     return ≤^i
20: end function
end
```

La fonction proposée opère en deux temps : tout d'abord les agents qui sont directement IC-inconsistants sont considérés comme moins fiables que les agents IC-consistants. Ils seront donc les agents les moins fiables selon l'ordre obtenu. Ensuite, l'ordre est raffiné selon le principe que plus un agent a un index important (et est donc lié à de nombreuses incohérences), plus sa fiabilité est faible.

A noter que la ligne 13 impose un choix : ce choix peut-être déterministe ou non déterministe.

D'autre part, la détermination des ensembles minimaux inconsistants effectuée ligne 2 est un problème classique qui a déjà reçu de nombreuses réponses dans la littérature ([16, 17, 18]). Cette opération est aisément réalisable via des solveurs SMT tels [19].

3.3 Propriétés de $\Gamma^{\oplus}_{IC,\Psi}$

Nous donnons ici les principales propriétés de la fonction $\mathrm{RefineReliability_{IC}}$. Tout d'abord, la fonction produit un pré-ordre total.

Proposition 1 $\mathrm{RefineReliability_{IC}}(\Psi)$ *est un pré-ordre total.*

Preuve 1 *La ligne 4 considère tous les agents de manière égale. Ensuite, la ligne 7 retire uniquement un sens de l'inégalité (entre IC-inconsistant et IC-consistant). Ligne 11 l'ordre est donc toujours total. L'itération ligne 12 ne considère que des agents IC-consistants et donc égaux. Ligne 14, seul un sens de l'inégalité est retiré et donc si l'ordre était total en ligne 14, il est aussi total en ligne 15. Ligne 19 le pré-ordre retourné est donc total.*

Sans surprise, la fonction est sensible à la syntaxe.

Proposition 2 *Il existe Ψ et Ψ' tel que $\Psi \equiv \Psi'$ et* $\mathrm{RefineReliability_{IC}}(\Psi) \neq \mathrm{RefineReliability_{IC}}(\Psi')$.

Preuve 2 *Soient $IC = \neg(p \wedge q) \wedge \neg(r \wedge s)$, $\Psi = \{< a, p >, < a, r >, < b, q >, < c, s >\}$, et $\Psi' = \{< a, p \wedge r >, < b, q >, < c, s >\}$. On a alors $\Psi \equiv \Psi'$, et $\Psi \perp IC = \Psi' \perp IC = \{\{a, b\}, \{a, c\}\}$, mais, avec Ψ, $\mid Index(a) \mid = 2$ tandis qu'avec Ψ', $\mid Index(a) \mid = 1$. On va donc dans ce premier cas toujours déclasser a en premier, ce qui n'est pas garanti dans le second.*

La propriété suivante caractérise l'indépendance vis-à-vis de la syntaxe de IC. L'aspect déterministe ou non de l'algorithme influe sur le résultat (autrement dit le choix ligne 13 est déterministe) :

Proposition 3 *Si $\vdash IC \leftrightarrow IC'$ alors* $\mathrm{RefineReliability_{IC}}(\Psi) = \mathrm{RefineReliability_{IC'}}(\Psi)$ *si et seulement si* $\mathrm{RefineReliability}_{IC}$ *est déterministe.*

Preuve 3 *La preuve est immédiate en considérant l'exemple suivant : $\Psi = \{< a, p >, < b, \neg p >\}$ et $IC = \top$ et $IC' = p \vee \neg p$. Dans la version non déterministe* $\mathrm{RefineReliability_{IC}}(\Psi)$ *peut produire $a \leq b$ alors que* $\mathrm{RefineReliability_{IC'}}(\Psi)$ *peut produire $b \leq a$*

La propriété suivante caractérise l'influence d'un agent silencieux

Proposition 4 *Si $\Psi_a = \emptyset$ alors* $\mathrm{RefineReliability_{IC}}(\Psi) = \mathrm{RefineReliability_{IC}}(\Psi - \Psi_a)$ *si et seulement si $RefineReliability_{IC}$ est déterministe.*

Preuve 4 *Conséquence de : si $\Psi_a = \emptyset$ alors $\Psi \perp IC = (\Psi - \Psi_a) \perp IC$.*

La propriété suivante considère le cas de communications consistantes.

Proposition 5 *Si Ψ est IC-consistant alors* $\mathrm{RefineReliability_{IC}}(\Psi)$ *est le pré-ordre égalité.*

Preuve 5 *Si Ψ est IC-consistant, la fonction* $\mathrm{RefineReliability_{IC}}(\Psi)$ *ne rentre pas dans les boucles et retourne le préordre égalité, initialisé en ligne* 4.

Les deux propositions suivantes spécifient comment le pré-ordre est raffiné.

Proposition 6 *Si $\{a_1, ..., a_k\}$ ($k \geq 2$) est un ensemble d'agents minimal IC-inconsistant, alors il existe i tel que pour tout $j \neq i$, $PF(a_j, \mathrm{RefineReliability_{IC}}(\Psi)) \subset PF(a_i, \mathrm{RefineReliability_{IC}}(\Psi))$*

Preuve 6 *Supposons $\{a_1, ..., a_k\}$ ($k \geq 2$) un ensemble d'agents minimal IC-inconsistant. Pour cet ensemble il existe donc EI qui appartient $\Psi \perp IC$. Supposons que $EI \in E^i$. La ligne 12 implique que $a_1 = ... = a_k$. Supposons que la ligne 13 choisisse l'agent a_j, alors la ligne 14 implique que $a_j < a_i$ pour tout $i \neq j$. Les lignes 15 et 16 impliquent que l'affaiblissement de a_j est définitif. Dans le cas où $EI \notin E^i$, cela veut dire* *qu'il existe EI' et il existe un agent $a_j \in \{a_1, ..., a_k\}$ qui appartient à un second ensemble d'agents minimal IC-inconsistant. a_j a été choisi lors du traitement de EI'.*

Les agents IC-inconsistants sont considérés comme les moins fiables :

Proposition 7 *Soit a un agent IC-inconsistant. Alors $A \setminus A^{\perp} \subseteq PF(a, \mathrm{RefineReliability}_{\mathrm{IC}}(\Psi))$ et il n'existe aucun agent b dans $A \setminus A^{\perp}$ tel que $a \in PF(b, \mathrm{RefineReliability}_{\mathrm{IC}}(\Psi))$.*

Preuve 7 *La ligne 6 définit une itération qui stipule que pour tout agent IC-inconsistant a celui ci est moins fiable que tout agent IC-consistant b (ligne 7). Autrement dit avant la ligne 7, $a = b$ et donc après la ligne 7, n'est conservée que l'inégalité $a \leq b$, et donc $a < b$. En conséquence, $A \setminus A^{\perp} \subseteq PF(a, \mathrm{RefineReliability}_{\mathrm{IC}}(\Psi))$, et il n'existe aucun agent b dans $A \setminus A^{\perp}$ tel que $b \leq a$.*

3.4 Caractérisation de $\oplus$

Dans cette section, nous listons quelques résultats relatifs aux opérateurs d'agrégation arbitraires à gauche, qui nous serviront pour établir la conformité de l'opérateur $\Gamma^{\oplus}_{IC,\Psi}$ vis à vis des postulats (voir théorème 1).

Soient $\leq_{ref}$, $\leq_{ref'}$, $\leq_{ap}$ des pré-ordres totaux sur A et $\oplus$ un opérateur d'agrégation arbitraire à gauche.

Proposition 8 *$\leq_{ref} \oplus \leq_{ap}$ est un pré-ordre total sur A*

Preuve 8 *Immédiat avec la propriété 1 de la définition de $\oplus$.*

Proposition 9 *Si $\leq_{ref} = \leq_{ref'}$, alors $\leq_{ref} \oplus \leq_{ap} = \leq_{ref'} \oplus \leq_{ap}$*

Preuve 9 *Evident.*

Proposition 10 *Si $\leq_{ref}$ est le pré-ordre égalité et si Ψ est IC-consistant, alors $\leq_{ref} \oplus \leq_{ap} = \leq_{ap}$*

Preuve 10 *$\leq_{ref} \oplus \leq_{ap} = (=) \oplus \leq_{ap} = \leq_{ap}$ Grâce à la propriété 2 de la définition de $\oplus$.*

Proposition 11 *Soit $\{a_1, ..., a_k\}$ $(k \geq 2)$ un ensemble d'agents minimal IC-inconsistant. S'il existe i tq $\forall j \neq i$, $PF(a_j, \leq_{ref}) \subset PF(a_i, \leq_{ref})$ alors il existe i tq $\forall j \neq i$, $PF(a_j, \leq_{ref} \oplus \leq_{ap}) \subset PF(a_i, \leq_{ref} \oplus \leq_{ap})$.*

Preuve 11 *Soit $\{a_1, ..., a_k\}$ $(k \geq 2)$ un ensemble d'agents minimal IC-inconsistant. On suppose qu'il existe un i tq $\forall j \neq i$, $PF(a_j, \leq_{ref}) \subset PF(a_i, \leq_{ref})$.*
$\Rightarrow \forall j \neq i$, $a_i <_{ref} a_j$
$\Rightarrow \forall j \neq i$, $a_i <_{ref \oplus ap} a_j$, d'après la propriété 3 de la définition de $\oplus$.
$\Rightarrow \forall j \neq i$, $PF(a_j, \leq_{ref \oplus ap}) \subset PF(a_i, \leq_{ref \oplus ap})$

Proposition 12 *Si pour tout a IC-inconsistant on a $A \setminus A^{\perp} \subseteq PF(a, \leq_{ref})$ et s'il n'existe aucun agent b dans $A \setminus A^{\perp}$ tel que $a \in PF(b, \leq_{ref})$, alors, $A \setminus A^{\perp} \subseteq PF(a, \leq_{ref} \oplus \leq_{ap})$*

Preuve 12 *Soient a un agent IC-inconsistant et $b \in A \setminus A^{\perp}$. On suppose $A \setminus A^{\perp} \subseteq PF(a, \leq_{ref})$ et $a \notin PF(b, \leq_{ref})$. On a donc $a <_{ref} b$. Donc, d'après la propriété 3 de la définition de $\oplus$, on a $a <_{ref \oplus ap} b$. Ce qui implique : $b \in PF(a, \leq_{ref} \oplus \leq_{ap})$.*

3.5 Conformité de $\Gamma^{\oplus}_{IC,\Psi}$ vis à vis des postulats

Théorème 1 *$\Gamma^{\oplus}_{IC,\Psi}$ respecte les postulats* **P1**, **P4**, **P5**, **P6**, **P7**. *$\Gamma^{\oplus}_{IC,\Psi}$ respecte le postulat* **P3** *dans le cas déterministe. $\Gamma^{\oplus}_{IC,\Psi}$ ne respecte pas le postulat* **P2**.

Preuve 13 *Selon les propositions 1 et 8, $\Gamma^{\oplus}_{IC,\Psi}$ respecte le postulat P1. En revanche, selon la proposition 2, il reste sensible à la syntaxe et ne respecte pas le postulat P2. Selon les propositions 3 et 9, il respecte le postulat P3 dans le cas déterministe. Selon les propositions 4 et 9 (resp. 5 et 10), il respecte le postulat P4 (resp. P5). Et enfin, selon les propositions 6 et 11 (resp. 7 et 12), il respecte le postulat P6 (resp. P7).*

Ainsi, en utilisant un choix déterministe dans l'algorithme, on obtiendrait un $\Gamma^{\oplus}_{IC,\Psi}$ respectant tous les postulats énoncés à l'exception de **P2** et donc restant sensible à la syntaxe de l'ensemble de communications.

3.6 Un opérateur particulier

Définition 1 *Soient $\leq_x$ et $\leq_y$ deux pré-ordres totaux de A. On définit un opérateur particulier $\oplus$ d'agrégation de préordres totaux, tel que $\forall a, b \in A$: $a \leq_{x \oplus y} b$ ssi $(a <_x b)$ ou $(a =_x b$ et $a \leq_y b)$.*

Proposition 13 *L'opérateur d'agrégation défini par la définition 1 est bien un opérateur d'agrégation arbitraire à gauche.*

Il s'agit donc d'un bon candidat pour la seconde phase de l'opérateur.

Dans la section suivante, nous illustrons cet opérateur sur un exemple.

4 Exemple

Soit l'ensemble d'informations certaines suivant :

$$IC = \{p \to q, \neg q, r\}.$$

Soit $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ et le pré-ordre initial : $a_1 \leq a_2 = a_3 \leq a_4 = a_5$. Ce qui signifie qu'a priori, on considère que a_1 est le moins fiable des agents, a_4 et a_5 sont les plus fiables, et entre les deux, a_2 et a_3 sont supposés plus fiables que a_1 mais moins que a_4 et a_5.

Soit l'ensemble de de communications suivant :

$$\begin{array}{ll} \Psi = \{ & < a_1, s >, \\ & < a_2, t >, < a_2, s >, \\ & < a_3, t \to \neg r >, \\ & < a_4, s \to p >, \\ & < a_5, s >, < a_5, p > \} \end{array}$$

L'ensemble $\Psi \perp IC$ des ensembles d'informations communiquées minimaux $IC-$inconsistants est :

$$\begin{array}{ll} \Psi \perp IC = \{ & \{< a_5, p >\}, \\ & \{< a_1, s >, < a_4, s \to p >\}, \\ & \{< a_2, s >, < a_4, s \to p >\}, \\ & \{< a_2, t >, < a_3, t \to \neg r >\}, \\ & \{< a_5, s >, < a_4, s \to p >\} \ \} \end{array}$$

Partant de $\Psi \perp IC$ le pré-ordre $\preceq$ est calculé comme suit :

$$\begin{array}{ll} index(a_1) = \{s\} & |Index(a_1)| = 1 \\ index(a_2) = \{s, t\} & |Index(a_2)| = 2 \\ index(a_3) = \{t \to \neg r\} & |Index(a_3)| = 1 \\ index(a_4) = \{s \to p\} & |Index(a_4)| = 1 \\ index(a_5) = \{s, p\} & |Index(a_5)| = 2 \end{array}$$

Ce qui donne : $a_1, a_3, a_4 \preceq a_2, a_5$

La première étape de l'opérateur $\Gamma^{\oplus}_{IC}(\Psi, \leq)$ est assurée par la fonction RefineReliability qui débute en considérant tous les agents au même niveau de fiabilité et produit :

$$\begin{array}{lcl} E^0 & = & \Psi \perp IC \\ A^0 & = & \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} \\ \leq^0 & = & \{a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5\} \end{array}$$

La ligne 6 de la fonction sélectionne l'agent a_5 qui est IC-inconsistant. Les lignes 7,8,9 produisent :

$$\begin{array}{lcl} \leq^1 & = & \{a_5 \leq a_1 = a_2 = a_3 = a_4\} \\ E^1 & = & \{\{< a_1, s >, < a_4, s \to p >\} \\ & & \{< a_2, s >, < a_4, s \to p >\} \\ & & \{< a_2, t >, < a_3, t \to \neg r >\}\} \\ A^1 & = & \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \end{array}$$

Il n'y a plus d'agents $IC-$inconsistant dans A^1. En exploitant le pré-ordre $\preceq$ sur A^1 nous obtenons $\max(A^1, \preceq) = \{a_2\}$. La ligne 13 sélectionne donc l'agent a_2 et les lignes 14 à 16 produisent :

$$\begin{array}{lcl} \leq^2 & = & \{a_5 \leq a_2 \leq a_1 = a_3 = a_4\} \\ E^2 & = & \{\{< a_1, s >, < a_4, s \to p >\}\} \\ A^2 & = & \{a_1, a_3, a_4\} \end{array}$$

En exploitant le pré-ordre $\preceq$ sur A^1 nous obtenons $\max(A^2, \preceq) = \{a_1, a_3, a_4\}$.
Supposons que la ligne 13 choisit **arbitrairement** a_1. Les lignes 14 à 16 produisent alors :

$$\begin{array}{lcl} \leq^3 & = & \{a_5 \leq a_2 \leq a_1 \leq a_3 = a_4\} \\ E^3 & = & \emptyset \\ A^3 & = & \{a_1, a_3\} \end{array}$$

E^3 étant vide, la fonction RefineReliability retourne alors $\leq^3$.
Dans la deuxième phase, $\leq^3$ est fusionné avec le pré-ordre initial $\leq$ selon l'opérateur de fusion de pré-ordres noté $\oplus$:

$$a_5 \leq a_2 \leq a_1 \leq a_3, a_4 \oplus a_1 \leq a_2, a_3 \leq a_4, a_5$$

Ainsi : $\Gamma^{\oplus}_{IC}(\Psi, \leq) = \{a_5 \leq a_2 \leq a_1 \leq a_3 \leq a_4\}$

Pour résumer, a_5 est considéré comme le moins fiable de tous les agents car il a émis des informations qui contredisent IC. a_2 est considéré comme le moins fiable des agents de $A \setminus \{a_5\}$ car c'est lui qui participe au plus de contradictions. a_3 est considéré comme le moins fiable parmi $A \setminus \{a_5, a_2\}$ par choix arbitraire de l'algorithme. Si l'on n'exploitait que les communications, on ne pourrait pas discriminer a_3 et a_4. Par contre, en exploitant le pré-order a priori, on peut considérer que a_3 est moins fiable que a_4.

5 Conclusion et perspectives

Ce travail tout à fait préliminaire s'est intéressé à un problème relativement original, celui de caractériser, par l'analyse des informations émises par des sources, le pré-ordre modélisant leur fiabilité relative. L'élaboration de ce pré-ordre, vue comme un opérateur de mise-à-jour d'un pré-ordre a priori a tout d'abord été caractérisé de façon axiomatique et un opérateur générique et un opérateur particulier ont ensuite été définis.

De nombreux choix, faits dans cet article, peuvent être discutés, ouvrant ainsi de nombreuses perspectives à ce travail.

Tout d'abord, des postulats alternatifs pourraient être considérés. Ainsi, pour ne donner qu'un exemple, il pourrait être intéressant de poser le postulat suivant : pour tout $a \in A^{\perp}$ et $b \notin A^{\perp}$, si $a = b$ alors $PF(b, \Gamma_{IC}(\Psi, \leq)) \subset PF(a, \Gamma_{IC}(\Psi, \leq))$. Selon ce point de vue, un agent ayant émis une information contradictoire serait considéré comme strictement moins fiable que n'importe quel agent qui était considéré initialement comme aussi fiable que lui, mais qui lui n'a pas émis d'informations contradictoires.

Ensuite, dans la définition de $RefineReliability$ on pourrait faire le choix d'une autre fonction $Index$, et prendre par exemple, pour tout $a \in A$, $Index(a) = \{E \in \Psi \perp IC : \exists \varphi, < a, \varphi > \in E\}$. Selon cette définition, l'index d'un agent serait l'ensemble des sous-ensembles de communications minimaux IC- inconsistants auxquels il a contribué. Ceci conduirait à utiliser d'autres relations $\preceq$ dans l'algorithme .

Une autre alternative dans l'algorithme serait de raffiner cette relation $\preceq$ en l'agrégeant selon $\oplus$ avec le préordre a priori renversé : $\preceq \oplus reverse(\leq)$. Sur l'exemple précédent, cela conduirait à $a_5 \leq a_2 \leq a_1 \leq a_3 \leq a_4$.

Enfin, il serait possible de définir d'autres opérateurs d'agrégation, pour, par exemple, agréger l'a priori avec le résultat de notre estimation $RefineReliability$ et d'autres pré-ordres issus d'itérations de $RefineReliability$ avec des paramètres différents, voire d'autres estimateurs de confiance.

Remerciements Nous remercions les relecteurs dont les remarques et questions nous ont aidés à améliorer ce papier.

Références

[1] Arrow, K., 1951/1963, Social Choice and Individual Values. New York : Wiley.

[2] Campbell, D.E. and Kelly, J.S. (2002) Impossibility theorems in the Arrovian framework, in Handbook of social choice and welfare (ed. by Kenneth J. Arrow, Amartya K. Sen and Kotaro Suzumura), volume 1, pages 35 94, Elsevier

[3] L. Cholvy. *Proving theorems in a multi-sources environment.* Proceedings of the 13th International Joint Conference on Artificial Intelligence. Chambéry, France, August 28 - September 3, 1993. Morgan Kaufmann 1993 pp 66-73.

[4] L. Cholvy. *Reasoning about merged information.* In Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty management, Vol 1, Kluwer Publishers 1998.

[5] L. Cholvy, R. Demolombe. *Reasoning with information sources ordered by topics.* Proceedings of Artificial Intelligence : Methods, Systems and Applications (AIMSA), World Scientific, Sofia, septembre 1994.

[6] F. Delmotte, P. Borne. *Modeling of Reliability with Possibility Theory* In IEEE Transactions on systems, man, and Cybernetics-Part A : Systems and Humans, vol 28, N°. 1, January 1998.

[7] R. Demolombe, *Reasoning about trust : a formal logical work.* in : Proceedings of the 2^{nd} second International Conference iTrust, 291-303, 2004.

[8] T.D. Huangh, N. R. Jennings. *An integrated trust and reputation model for open multi-agent systems* Autonomous Agent Multi-Agent Systems Journal , 13, pp 119-154, 2006.

[9] S H Houmb, I Ray, I Ray *Estimating the Relative Trustworthiness of Information Sources in Security Solution Evaluation* Proceedings of Trust Management : 4th International Conference, ITrust 2006, LNCS 3986, Springer.

[10] J. W. Klüwer and A. Waaler *Relative trustworthiness* In T. Dimitrazkos et al (eds). FAST 2005. LNCS 3866, pp 158-170, 2006.

[11] J. W. Klüwer and A. Waaler *Trustworthiness by default* In F. Toni and P. Torroni (eds). CLIMA VI, LNAI 3900, pp 96-111, 2006.

[12] C.-J. Liau *A modal logic framework for multi-agent belief fusion.* In ACM Transactions on Computational Logic, 6(1) : 124-174 (2005)

[13] List, Christian, "Social Choice Theory", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.), <http ://plato.stanford.edu/archives/win2013/entries/social-choice/>.

[14] E. Lorini and L. Perrussel and J.M. Thévenin. *A Modal Framework for Relating Belief and Signed Information.* in : Proceedings of 13^{th} International Workshop on Computational Logic In Multi-Agent Systems (CLIMA'11), LNAI 6814,58-73, Springer-Verlag, 2011.

[15] G. Shafer. *A mathematical Theory of Evidence* Princeton University Press, 1976.

[16] I. Lynce, J. P. Marques-Silva, On Computing Minimum Unsatisfiable Cores, In SAT 2004 - The Seventh International Conference on Theory and Applications of Satisfiability Testing, 10-13 May 2004, Vancouver, BC, Canada, Online Proceedings.

[17] N. Dershowitz, Z. Hanna, A. Nadel, A Scalable Algorithm for Minimal Unsatisfiable Core Extraction, In Proceedings of SAT'06, Vol. 4121 of LNCS. Springer. 2006.

[18] A. Cimatti, A. Griggio, R. Sebastiani, Computing Small Unsatisfiable Cores in Satisfiability Modulo Theories, in Journal of Artificial Intelligence Research 40 (2011) 701-728

[19] L. de Moura, N. Bjørner, Z3 : An Efficient SMT Solver. In Vol. 4963 of LNCS, pp. 337-340, Springer, 2008.