Expansion et révision privées dans KD45n

Thomas Caridroit Sébastien Konieczny Tiago de Lima Pierre Marquis
CRIL, CNRS – Université d'Artois, Lens
{caridroit,konieczny,delima,marquis}@cril.fr

Résumé

Nous étudions les opérateurs d'expansion et de révision privées dans un cadre multi-agent. Plus précisément, nous étudions les changements induits par un nouvel élément d'information mis à disposition d'un seul agent dans un modèle KD45$_n$. Nous proposons une traduction des postulats d'expansion et de révision AGM dans ce cadre, et proposons des opérateurs concrets d'expansion et de révision.

Abstract

We study private expansion and revision operators in a multi-agent setting. More precisely, we study the changes induced by a new piece of information made available to only one agent in a KD45$_n$ model. We point out a translation of AGM expansion and revision postulates to this setting, and define specific expansion and revision operators.

1 INTRODUCTION

La théorie du changement de croyances vise à formaliser l'évolution des croyances d'un agent quand il est confronté à de nouvelles informations. Le principal cadre théorique pour le changement de croyances est la théorie AGM (Alchourrón-Gärdenfors-Makinson) et ses développements [1, 16, 15].

Dans la plupart des travaux sur la révision de croyances, l'ensemble de croyances d'un agent est composé de croyances au sujet de l'environnement (du monde) et est représenté par un ensemble de formules de la logique classique.

Dans de nombreuses applications, un agent n'est pas seul dans l'environnement, mais le partage avec d'autres agents, qui ont aussi des croyances. Ainsi, les croyances sur les croyances des autres agents constituent un élément d'information important pour l'agent, pour prendre les meilleures décisions et effectuer les meileures actions. L'utilisation de croyances sur les croyances des autres agents est par exemple cruciale en théorie des jeux [5, 6, 24, 21].

Les outils logiques les plus courants pour représenter les croyances sur les croyances des autres agents sont les logiques épistémiques. Ainsi le changement de croyances dans les logiques épistémiques est une question importante.

Il existe quelques travaux sur les liens entre les logiques épistémiques et la théorie de changement de croyances, mais la plupart d'entre eux étudient l'encodage des opérateurs de changement de croyances dans les modèles épistémiques, où la relation d'accessibilité code les différents niveaux de plausibilité des informations qui guident le processus de révision [13, 7, 11, 23].

Ici, nous nous intéressons à une autre connexion entre les logiques épistémiques et la théorie du changement de croyances. Nous sommes intéressés par la définition des opérateurs qui modifient les croyances des agents dans les modèles KD45$_n$ standard. Cette tâche est plus compliquée que dans le cadre AGM usuel, parce que, dans un contexte multi-agents, les nouvelles informations peuvent prendre différentes formes. Par exemple, chaque nouvelle information peut être observée/transmise/disponible à tous les agents ou seulement à certains d'entre eux. Ce genre de question a déjà été étudiée en logiques épistémiques dans le cadre des annonces publiques et privées [26, 4].

Une annonce est un moyen d'obtenir une nouvelle information, mais ce n'est pas le seul (observation directe, etc.). Nous allons donc utiliser les termes « changement public » et « changement privé » dans ce qui suit. Un changement public est un changement qui est produit par une information qui est disponible pour chaque agent. Dans ce cas, nous restons dans le cadre AGM standard, et nous pouvons utiliser ses résultats. (postulats, théorèmes de représentation, etc) afin de définir des opérateurs adéquats de changement de croyances. Un changement privé est un changement qui est produit par une information qui est disponible pour un agent. Cela signifie que les croyances de cet agent doivent changer, alors que les croyances des autres doivent rester inchangées. Dans ce cas, nous ne pouvons pas appliquer directement les définitions AGM. Cela nécessite donc des définitions particulières et c'est ce que nous proposons dans ce travail.

Le but de cet article est ainsi de proposer et d'étudier un cadre de changement de croyances multi-agent, où les croyances des agents sont représentées par un modèle KD45$_n$. Nous considérons le changement privé, où un agent donné reçoit une nouvelle information, et nous voulons définir le nouveau modèle KD45$_n$ qui représente la nouvelle situation épistémique. Nous considérons uniquement des informations objectives, c'est-à-dire des informations au sujet de l'environnement (du monde). Le problème de l'étude des changements par des informations subjectives (c'est-à-dire des informations sur les croyances des autres agents) est plus difficile et est laissé pour des travaux futurs. Nous étudions à la fois l'expansion et la révision. Pour chaque cas, nous présentons une traduction de postulats AGM pour le cadre multi-agents et des opérateurs particuliers.

Dans la section 2, nous donnons les préliminaires formels requis sur le cadre logique KD45$_n$ et la théorie AGM du changement de croyances. Dans la section 3, nous traduisons les postulats AGM pour l'expansion dans le cadre multi-agents. Dans la section 4, nous proposons un opérateur d'expansion particulier. Dans la section 5, nous traduisons les postulats AGM pour la révision, et dans la section 6, nous proposons une famille d'opérateurs de révision. Enfin, dans la section 7, nous discutons de certains travaux connexes avant de conclure en section 8.

Pour des raisons d'espace, les preuves sont omises dans l'article, elles peuvent être trouvées dans le rapport technique correspondant [12].

2 PRÉLIMINAIRES

Nous considérons un langage propositionnel L_0 construit à partir d'un ensemble fini de variables propositionnelles P et des connecteurs $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ représentant respectivement la négation, la disjonction, la conjonction, l'implication matérielle et l'équivalence. $\bot$ et $\top$ représentent respectivement la contradiction et la tautologie.

Soient un ensemble de croyances (c'est-à-dire un ensemble de formules déductivement clos) K et une formule φ donnée. $K + \varphi$ désigne l'expansion de K par φ, $K \star \varphi$ désigne la révision de K par φ.

Alchourrón, Gärdenfors, Makinson [1, 16] ont proposé les postulats suivant pour l'expansion d'ensemble de croyances :

(K+1) $K + \varphi$ est un ensemble de croyances

(K+2) $\varphi \in K + \varphi$

(K+3) $K \subseteq K + \varphi$

(K+4) Si $\varphi \in K$, alors $K + \varphi = K$

(K+5) Si $K' \subseteq K$, alors $K' + \varphi \subseteq K + \varphi$

(K+6) Pour tout ensemble de croyances K et toute formule φ, $K + \varphi$ est le plus petit ensemble de croyances satisfaisant (K+1)–(K+5).

Et les postulats suivants pour la révision d'ensemble de croyances :

(K*1) $K * \varphi$ est un ensemble de croyances

(K*2) $\varphi \in K * \varphi$

(K*3) $K * \varphi \subseteq K + \varphi$

(K*4) Si $\neg\varphi \notin K$, alors $K + \varphi \subseteq K * \varphi$

(K*5) $K * \varphi = K_\bot$ ssi $\models \neg\varphi$

(K*6) Si $\varphi \equiv \psi$, alors $K * \varphi \equiv K * \psi$

(K*7) $K * (\varphi \wedge \psi) \subseteq (K * \varphi) + \psi$

(K*8) Si $\neg\psi \notin K * \varphi$, alors $(K * \varphi) + \psi \subseteq K * (\varphi \wedge \psi)$

Ces postulats codent logiquement les contraintes attendues sur le comportement des opérateurs d'expansion et de révision. Plusieurs théorèmes de représentation en termes d'ensembles maximaux cohérents [1], de relations de plausibilité sur les formules [16], ou de relations de plausibilité sur les mondes [20, 17] existent, permettant de définir des opérateurs avec ces propriétés attendues.

Nous nous intéressons ici à un cadre avec plusieurs agents ayant leurs propres croyances au sujet de l'état du monde. Cela nécessite l'utilisation d'une logique épistémique multi-agents.

Soit $A = \{1, \dots, n\}$ un ensemble fini d'agents. Nous considérons le langage L contenant le langage propositionnel L_0 augmenté par qu'un opérateur de croyances B_i par agent $i \in A$. Nous utilisons parfois B_i^k pour abréger une suite de k opérateurs B_i(i.e., $\mathrm{B}_i^0\varphi$ abrège φ et $\mathrm{B}_i^{k+1}\varphi$ abrège $\mathrm{B}_i\mathrm{B}_i^k\varphi$, pour $k \geq 0$.). Une formule de la forme $\mathrm{B}_i\varphi$ est lue « l'agent i croit que φ est vraie ». Les formules de L_0 sont aussi appelé formules objectives, tandis que les formules subjectives sont des formules de la forme $\mathrm{B}_i\varphi$ et $\neg\mathrm{B}_i\varphi$, pour $\varphi \in L$.

Afin de donner un sens à nos formules, et en particulier, aux opérateurs B_i, nous utilisons le système KD45$_n$ standard pour n agents [14].

Un tel système est constitué de l'ensemble des formules de L qui peuvent être dérivées en utilisant les axiomes et les règles d'inférence suivants :

(TAU) Tous les instanciations de tautologies propositionnelles

(K) $(\mathrm{B}_i\varphi \wedge \mathrm{B}_i(\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow \mathrm{B}_i\psi$ (fermeture par implication)

(D) $\neg\mathrm{B}_i\bot$ (cohérence des croyances)

(4) $\mathrm{B}_i\varphi \Rightarrow \mathrm{B}_i\mathrm{B}_i\varphi$ (introspection positive)

(5) $\neg\mathrm{B}_i\varphi \Rightarrow \mathrm{B}_i\neg\mathrm{B}_i\varphi$ (introspection négative)

(RM) De $\models \varphi \Rightarrow \psi$ et $\models \varphi$ déduire $\models \psi$ (Modus Ponens)

(RN) De $\models \varphi$ déduire $\models \mathrm{B}_i\varphi$ (nécessité)

Le même ensemble de validités peut être capturé à l'aide d'une approche sémantique. La plus commune est fondée sur les modèles de Kripke.

Définition 1 (Modèle de Kripke) *Un modèle de Kripke est un tuple $\langle W, R, V\rangle$ où :*

- *W est un ensemble non vide de mondes.*
- *$R = \{R_i \mid i \in A\}$. Chaque R_i est la relation binaire d'accessibilité pour l'agent i.*
- *$V : W \to 2^P$ est une fonction de valuation. Pour chaque monde possible $w \in W$, $V(w)$ est l'ensemble de variables propositionnelles qui sont vraies dans w.*

$R_i(w)$ est l'ensemble des mondes possibles qui sont accessibles depuis w pour l'agent i, à savoir, $R_i(w) = \{w' \mid (w, w') \in R_i\}$.

Définition 2 (Modèle de Kripke pointé) *Un modèle pointé de Kripke est un couple (M, w), où $M = \langle W, R, V\rangle$ est un modèle de Kripke et $w \in W$ est un monde.*

Nous notons $(M, w) \models \varphi$ le fait que la formule φ est satisfaite dans le monde w dans le modèle M. Cette notion est définie comme suit :

Définition 3 (Relation de satisfaction)

— $(M, w) \models p$ *ssi* $p \in V(w)$

— $(M, w) \models \neg\varphi$ *ssi* $(M, w) \not\models \varphi$

— $(M, w) \models \varphi \wedge \psi$ *ssi* $(M, w) \models \varphi$ *et* $(M, w) \models \psi$

— $(M, w) \models \mathrm{B}_i\varphi$ *ssi* $\forall w' \in W$ *si* $(w, w') \in R_i$ *alors* $(M, w') \models \varphi$

Nous utilisons $\|\varphi\|_M$ pour désigner l'ensemble de mondes possibles de M qui satisfont φ, à savoir, $\|\varphi\|_M = \{w | w \in W \text{ et } (M, w) \models \varphi\}$.

Deux modèles pointés de Kripke différents peuvent satisfaire le même ensemble de formules. Une telle paire de modèle est alors considérée comme équivalente. Cela signifie qu'ils représentent exactement la même situation. Il est bien connu que deux modèles pointés de Kripke sont équivalents si et seulement si ils sont bisimilaires, dans le sens suivant :

Définition 4 (Bisimilarité) *Soient $M_1 = \langle W_1, R_1, V_1\rangle$ et $M_2 = \langle W_2, R_2, V_2\rangle$ deux modèles de Kripke. Les deux modèles pointés de Kripke $(M_1, w_1^\star)$ et $(M_2, w_2^\star)$ sont bisimilaires, noté $(M_1, w_1^\star) \leftrightarroweq (M_2, w_2^\star)$, si et seulement si il existe une relation $Z \subseteq W_1 \times W_2$ telle que $(w_1^\star, w_2^\star) \in Z$ et pour tout $(w_1, w_2) \in Z$:*

1. *$V_1(w_1) = V_2(w_2)$;*
2. *si $\exists w_2' \in W_2$ tel que $(w_2, w_2') \in R_2$, alors $\exists w_1' \in W_1$ tel que $(w_1, w_1') \in R_1$ et $(w_1', w_2') \in Z$ et*
3. *si $\exists w_1' \in W_1$ tel que $(w_1, w_1') \in R_1$, alors $\exists w_2' \in W_2$ tel que $(w_2, w_2') \in R_2$ et $(w_2', w_1') \in Z$.*

Tout les modèles de Kripke ne sont pas des modèles du système KD45$_n$. Il s'avère que le axiomes **D**, **4** et **5** ci-dessus imposent des contraintes supplémentaires sur ces modèles. Les relations suivantes sont bien connues (voir, e.g., [10]) :

— Les modèles sériels satisfont **D** :
(sériel) $\forall w_1, \exists w_2$ tel que $w_1 R_i w_2$

— Les modèles transitifs satisfont **4** :
(transitif) $\forall w_1, w_2, w_3$, $w_1 R_i w_2$ et $w_2 R_i w_3$ implique $w_1 R_i w_3$

— Les modèles Euclidiens satisfont **5** :
(Euclidien) $\forall w_1, w_2, w_3$, $w_1 R_i w_2$ et $w_1 R_i w_3$ implique $w_2 R_i w_3$

De plus, tous les modèles du système KD45$_n$ possèdent un modèle bisimilaire qui est sériel, transitif et Euclidien. Par conséquent, à partir de maintenant, nous utiliserons uniquement des modèles de Kripke qui satisfont ces trois propriétés. Nous les appellerons modèles KD45$_n$, ou dirons simplement qu'ils appartiennent à KD45$_n$.

Une formule $\varphi \in L$ est valide (notée $\models \varphi$) si et seulement si $(M, w) \models \varphi$, pour tout $(M, w) \in$ KD45$_n$. L'ensemble des formules valides définies comme telles est le même que l'ensemble des formules qui peuvent être dérivées dans le système de KD45$_n$ (une preuve peut être trouvée dans [14]).

Dans la suite, nous faisons l'hypothèse que la nouvelle information est toujours une formule cohérente. Faire un changement par une formule incohérente est permis par les postulats AGM, mais n'a pas beaucoup d'intérêt dans les applications pratiques.

3 EXPANSION PRIVÉE

Notre objectif dans cette section est de proposer une formulation équivalente des postulats AGM dans un contexte multi-agents.

Ici, un modèle pointée KD45$_n$ (M, w) représente un ensemble de n ensembles de croyances $K_i^{(M,w)}$, un pour chaque agent $i \in A$, où : $K_i^{(M,w)} = \{\varphi \mid (M, w) \models \mathrm{B}_i\varphi\}$

Nous définissons aussi l'ensemble de croyances objectives de l'agent i, (ce que i croit à propos de l'état du monde). C'est l'ensemble : $O_i^{(M,w)} = K_i^{(M,w)} \cap L_0$

Nous nous concentrons ici sur les opérateurs d'expansion privée : un seul agent augmente ses croyances ; en effet, suite à une annonce privée, les croyances des autres agents ainsi que les croyances d'ordre supérieur de tous les agents restent inchangées.

Notons $(M, w) +_a \varphi = (M', w') = (\langle W', R', V'\rangle, w')$ le résultat de l'expansion privée du modèle (M, w) par la formule objective φ pour l'agent a. Les postulats d'expansion AGM peuvent être réécrits comme suit :

(E_n0) $V'(w') = V(w)$

(E_n1) Si $(M, w) \not\models \mathrm{B}_a\neg\varphi$ alors $(M, w) +_a \varphi \in$ KD45$_n$

(E_n2) $(M, w) +_a \varphi \models \mathrm{B}_a\varphi$

(E_n3) $(M, w) \models \mathrm{B}_i\psi$ ssi $(M, w)+_a\varphi \models \mathrm{B}_i\psi$, pour $i \neq a$

(E_n4) Si $(M, w) \not\models \mathrm{B}_a\neg\varphi$ alors $(M, w) \models \mathrm{B}_a^k\mathrm{B}_i\psi$ ssi $(M, w) +_a \varphi \models \mathrm{B}_a^k\mathrm{B}_i\psi$, pour $i \neq a$ et $k \geq 1$

(E_n5) Si $(M, w) \models \mathrm{B}_a\psi$ alors $(M, w) +_a \varphi \models \mathrm{B}_a\psi$

(E_n6) Si $(M, w) \models \mathrm{B}_a\varphi$ alors $(M, w) +_a \varphi \leftrightarrows (M, w)$

(E_n7) Si $(M_1, w_1) \models \mathrm{B}_i\psi$ implique $(M_2, w_2) \models \mathrm{B}_i\psi$ alors $(M_1, w_1) +_a \varphi \models \mathrm{B}_i\chi$ implique $(M_2, w_2) +_a \varphi \models \mathrm{B}_i\chi$

(E_n8) Pour tout (M', w'), si (M', w') satisfait (E_n1)–(E_n7) alors $(M, w) +_a \varphi \models \mathrm{B}_a\psi$ implique $(M', w') \models \mathrm{B}_a\psi$

La plupart de ces postulats sont une transposition des postulats AGM sur les modèles KD45$_n$. Les autres expriment surtout sur le fait que les seules choses qui changent sont les croyances de l'agent a sur l'état du monde. (E_n0) dit que le monde réel ne change pas : comme d'habitude dans la révision de croyances le monde ne change pas [1], ce sont seulement les croyances de l'agent qui évoluent. (E_n1) dit que, dans le cas où la nouvelle information ne contredit pas les croyances de l'agent, après l'expansion privée, le modèle reste KD45$_n$. En effet, lorsque l'expansion se fait par une formule qui contredit les croyances de l'agent, le résultat viole l'axiome **D** pour l'agent. Le modèle n'est donc plus KD45$_n$. (E_n2) est le postulat de succès. Il affirme que, après l'expansion privée par φ, l'agent a croit φ. Le postulat (E_n3) indique que les croyances de tous les agents sauf a ne changent pas. Le postulat (E_n4) indique que les croyances de l'agent a sur les autres agents ne changent pas. Les postulats (E_n5) et (E_n6) assurent que si φ est déjà crue par l'agent a alors l'expansion privée ne change rien, ainsi le modèle résultant est bisimilaire au modèle initial. Le postulat (E_n7) est la traduction de la propriété de monotonie. Il indique que, si un modèle permet plus d'inférences que l'autre, alors l'expansion du premier permet plus d'inférences que l'expansion du second. Le postulat (E_n8) est le postulat de minimalité. Il indique que le résultat de l'expansion du modèle par φ est un changement de croyances minimal.

Ces postulats impliquent :

Proposition 1 *Il y a un unique (à une bisimulation près) opérateur d'expansion privé satisfaisant* (E_n0)–(E_n8).

La propriété suivante montre que les postulats que nous proposons ci-dessus forment une extension conservative des postulats d'expansion AGM habituels, en montrant que le comportement de formules objectives est identique à celui de l'opérateur AGM classique.

1. Quand le monde évolue, il faut utiliser la mise à jour [19, 18].

Proposition 2 *Soit $+_i$ un opérateur d'expansion satisfaisant (E_n0)–(E_n8), alors, l'opérateur + défini par $O_i^{(M,w)} + \varphi = O_i^{(M,w)+_i\varphi}$ est un opérateur d'expansion AGM (il satisfait (K+1)–(K+6)).*

4 UN OPÉRATEUR D'EXPANSION PRIVÉE

Donnons maintenant une définition constructive de l'opérateur d'expansion privée caractérisé dans la section précédente.

Dans la suite de cet article, nous utilisons la notation suivante pour les mondes nouvellement créés (par expansion ou révision) : v_w^e. Cette notation signifie que le monde v est une « copie » du monde w (cette copie est essentielle pour éviter de perdre les croyances d'ordre supérieur de l'agent qui effectue l'expansion ou la révision de ses croyances) et ayant la valuation e.

Nous donnons maintenant une définition de l'opérateur d'expansion privée :

Définition 5 ***Expansion de** (M, w_0) **par** φ **pour l'agent** a.* *Soient $(M, w_0) = (\langle W, R, V\rangle, w_0)$ un modèle KD45$_n$, et φ une formule objective cohérente ($\varphi \in L_0$). Nous définissons l'expansion privée de (M, w_0) par φ pour l'agent a comme $(M, w_0) +_a \varphi = (\langle W', R', V'\rangle, w'_0)$, avec :*

- $E = \{V(w) \mid w \in R_a(w_0) \cap \|\varphi\|_M\}$
- $W' = W \cup W^\varphi \cup \{w'_0\}$ *où*
  - $W^\varphi = \bigcup_{w \in R_a(w_0)} W_w^\varphi$
  - $W_w^\varphi = \bigcup_{e \in E} \{v_w^e\}$
- $R'_a = R_a \cup R_a^\varphi \cup R_a^0$ *où*
  - $R_a^\varphi = \{(w_1^\varphi, w_2^\varphi) \mid w_1^\varphi, w_2^\varphi \in W^\varphi\}$
  - $R_a^0 = \{(w'_0, w^\varphi) \mid w^\varphi \in W^\varphi\}$
- $R'_i = R_i \cup R_i^{\overrightarrow{\varphi}} \cup R_i^0$, *pour $i \neq a$, où*
  - $R_i^{\overrightarrow{\varphi}} = \{(v_w^e, w') \mid (w, w') \in R_i$ *et* $v_w^e \in W^\varphi\}$, *pour $i \neq a$*
  - $R_i^0 = \{(w'_0, w) \mid (w_0, w) \in R_i\}$, *pour $i \neq a$*
- $V'(w) = V(w)$, *pour $w \in W$*
- $V'(v_w^e) = e$, *pour $v_w^e \in W^\varphi$*
- $V'(w'_0) = V(w_0)$

Lorsque l'agent a étend ses croyances, le modèle doit changer afin d'intégrer ce changement, mais les croyances des autres agents doivent rester inchangées. Le nouvel ensemble de mondes possibles W' contient tous les mondes du modèle initial, un nouveau monde réel w'_0 et un ensemble de mondes W^φ représentant les nouvelles croyances de l'agent a. L'ensemble W^φ contient une copie des mondes de $R_a(w_0)$ qui ne contredisent pas φ.

La nouvelle relation d'accessibilité R'_a contient la relation initiale R_a et l'ensemble R^0_a. L'ensemble R^0_a est constitué de l'ensemble des couples (w'_0, w^φ) où $w^\varphi \in W^\varphi$, modifiant ainsi les croyances de l'agent effectuant l'expansion. L'ensemble R^φ_a est constitué de l'ensemble des couples $(w^\varphi_1, w^\varphi_2) \in W^\varphi$. Les mondes de W^φ forment ainsi une clique, car ils sont tous également plausibles pour l'agent effectuant l'expansion.

Chaque relation d'accessibilité R'_i, pour $i \neq a$, contient la relation initiale R_i et les ensembles R^0_i et $R^{\overrightarrow{\varphi}}_i$. L'ensemble R^0_i est constitué de l'ensemble des couples (w'_0, w) tels que $(w_0, w) \in R_i$, préservant ainsi les croyances des agents qui n'effectuent pas l'expansion et les croyances d'ordre supérieur de tous les agents. L'ensemble $R^{\overrightarrow{\varphi}}_i$ est constitué de l'ensemble des couples (v^e_w, w'), où $v^e_w \in W^\varphi$ tel que $(w, w') \in R_i$, gardant ainsi les croyances d'ordre supérieur de l'agent effectuant l'expansion.

Nous pouvons maintenant montrer que :

Proposition 3 *L'opérateur $+$ satisfait (E_n0)–(E_n8).*

Et comme conséquence directe de la proposition 1, cet opérateur est l'unique opérateur d'expansion privée.

Illustrons maintenant le comportement de cet opérateur d'expansion privée sur un exemple simple.

Example 1 *Prenons le modèle KD45$_n$ (M_0, w_0) de la figure 1. Dans cette situation, l'agent 1 croit $\neg p$ et il croit que l'agent 2 croit $\neg p$. L'agent 2 croit $\neg p \wedge \neg q$, et il croit que l'agent 1 croit $\neg p$. Donc, l'agent 2 a des croyances vrais à propos des croyances de l'agent 1.*

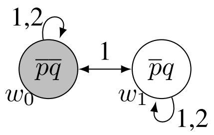

FIGURE 1 – (M_0, w_0)

Après l'expansion par q, illustrée sur la figure 2, l'agent 1 doit croire $\neg p \wedge q$. Le monde ayant pour valuation $\neg p \wedge q$ doit être dupliqué afin de maintenir les croyances d'ordre supérieur de l'agent 1. A contrario les croyances de l'agent 2 restes inchangées, en particulier, l'agent 2 croit toujours que l'agent 1 croit $\neg p$.

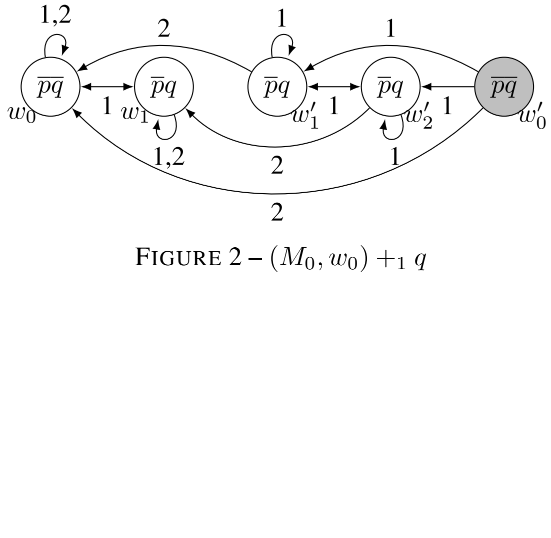

FIGURE 2 – $(M_0, w_0) +_1 q$

Montrons maintenant que notre approche de l'expansion privée peut être définie à l'aide d'un produit par un type spécifique de modèle d'événement pointé. Ce résultat est tout à fait similaire à ce qui est montré dans [4] pour les modèles internes.

Un modèle d'événement est défini dans [4] (voir aussi [9, 8, 26]) comme un tuple $\langle S, T, \mathrm{pre}\rangle$ où S est un ensemble non vide d'événements possibles, $T = \{T_i : i \in A\}$, où chaque T_i est une relation binaire d'accessibilité pour l'agent i, et $\mathrm{pre} : S \to L$ est une fonction qui retourne, pour chaque événement possible s, sa précondition $\mathrm{pre}(s)$. Un modèle d'événement pointé est un couple $(\langle S, T, \mathrm{pre}\rangle, s)$ où $s \in S$ est l'événement actuel.

Le produit du modèle pointé (M, w) par le modèle d'événement pointé (N, s) est un nouveau modèle pointé $(M^N, w.s)$ défini comme suit :

$$\begin{aligned}
M^N &= \langle W^N, R^N, V^N\rangle\\
W^N &= \{w.s : M, w \models \mathrm{pre}(s)\}\\
R^N &= \{(w.s, w'.s') : (w, w') \in R_a \text{ and } (s, s') \in T_a\}\\
V^N &= V
\end{aligned}$$

Intuitivement, le produit de (M, w) par (N, s) est un nouveau modèle de Kripke M' où chaque monde possible $w.s$ est une combinaison d'un monde possible w de M et d'un événement possible s de N, à condition que la précondition de s soit vraie dans w. La relation d'accessibilité du modèle résultat est calculée en utilisant les relations d'accessibilité de M et N. La valuation du modèle résultat est la même que la valuation de M. Enfin, le monde réel de M^N est le monde possible $w.s$ tel que w est le monde réel de M et s et l'événement réel de N.

Dans la suite, nous montrons que la notion d'expansion donnée à la définiton 5 est équivalente à un produit de modèle spécifique. Plus précisément, $(M, w_0) +_a \varphi$ et $(M^{N^{+a}}, w.s_0)$ sont bisimilaires, où :

$$\begin{aligned}
N^{+a} &= \langle S, T, \mathrm{pre}\rangle\\
S &= \{s_0, s_\varphi, s_\top\}\\
T_a &= \{(s_0, s_\varphi), (s_\varphi, s_\varphi), (s_\top, s_\top)\}\\
T_i &= \{(s_0, s_\top), (s_\varphi, s_\top), (s_\top, s_\top)\}, \text{ pour tout } i \neq a\\
\mathrm{pre}(s_0) &= \bigwedge_{p \in V(w_0)} p \wedge \bigwedge_{p \in P \setminus V(w_0)} \neg p\\
\mathrm{pre}(s_\varphi) &= \varphi\\
\mathrm{pre}(s_\top) &= \top
\end{aligned}$$

Proposition 4 $((M, w_0) +_a \varphi) \leftrightarrows (M^{N^{+a}}, w_0.s_0)$.

5 RÉVISION PRIVÉE

Passons maintenant aux opérateurs de révision privée. Ces opérateurs se comportent comme l'expansion quand il n'y a pas de contradiction entre les croyances de l'agent et la nouvelle information, mais, à l'inverse de l'expansion, ne conduisent pas à un résultat trivial quand ce n'est pas le cas.

Notons $(M, w) \star_a \varphi = (M', w') = (\langle W', R', V'\rangle, w')$ le résultat de la révision privée de (M, w) par la formule objective φ pour l'agent a. Les postulats de révision AGM peuvent être réécrits comme suit :

(R_n0) $V'(w') = V(w)$

(R_n1) $(M, w) \star_a \varphi \in \mathrm{KD45}_n$

(R_n2) $(M, w) \star_a \varphi \models \mathrm{B}_a\varphi$

(R_n3) $(M, w) \models \mathrm{B}_i\psi$ ssi $(M, w) \star_a \varphi \models \mathrm{B}_i\psi$, pour $i \neq a$

(R_n4) $(M, w) \models \mathrm{B}_a^k\mathrm{B}_i\psi$ ssi $(M, w) \star_a \varphi \models \mathrm{B}_a^k\mathrm{B}_i\psi$, pour $i \neq a$

(R_n5) Si $(M, w) \star_a \varphi \models \mathrm{B}_i\psi$ alors $(M, w) +_a \varphi \models \mathrm{B}_i\psi$

(R_n6) Si $(M, w) \not\models \mathrm{B}_a\neg\varphi$, alors $(M, w) +_a \varphi \leftrightarroweq (M, w) \star_a \varphi$

(R_n7) Si $(M^1, w^1) \leftrightarroweq (M^2, w^2)$ et $\models \varphi \equiv \psi$, alors $(M^1, w^1) \star_a \varphi \leftrightarroweq (M^2, w^2) \star_a \psi$

(R_n8) Si $(M, w) \star_a (\varphi \wedge \psi) \models \mathrm{B}_i\chi$ alors $((M, w) \star_a \varphi) +_a \psi \models \mathrm{B}_i\chi$

(R_n9) Si $(M, w) \star_a \varphi \not\models \mathrm{B}_a\neg\psi$, alors $((M, w) \star_a \varphi) +_a \psi \models \mathrm{B}_i\chi$ implique $(M, w) \star_a (\varphi \wedge \psi) \models \mathrm{B}_i\chi$

(R_n1) veille à ce que le modèle obtenu après une révision soit toujours un modèle KD45$_n$. (R_n2) est le postulat de succès, il indique que φ est crue par a après la révision. (R_n3) indique que les croyances de tous les agents sauf a ne changent pas. (R_n4) indique que les croyances de l'agent a sur les autres agents ne changent pas. (R_n5) et (R_n6) indique que lorsque la nouvelle information est cohérente avec les croyances de l'agent, la révision est juste une expansion. (R_n7) est le postulat d'indépendance à la syntaxe, affirmant que si deux formules sont logiquement équivalentes, alors la révision par l'une ou l'autre de ces formules conduit au même résultat. (R_n8) et (R_n9) expriment quand la révision par une conjonction peut être obtenue pas une révision suivie d'une expansion.

Montrons maintenant que les opérateurs de révision que nous définissons forment une extension conservatrive des opérateurs de révision de croyances AGM habituels :

Proposition 5 *Soit $\star_i$ un opérateur de révision satisfaisant (R_n0)–(R_n9), alors l'opérateur $\star$ définie comme $O_i^{(M,w)} \star \varphi = O_i^{(M,w)\star_i\varphi}$ est un opérateur de révision AGM (il satisfait (K*1)–(K*8)).*

6 UNE FAMILLE D'OPÉRATEURS DE RÉVISION PRIVÉE

Nous définissons maintenant une famille d'opérateurs de révision privée. Ces opérateurs sont définis de façon similaire à l'opérateur d'expansion de la section 4, mais dans le cas où la nouvelle information est incohérente avec les croyances actuelles de l'agent, ils utilisent un opérateur de révision de croyances AGM classique $\star$ pour définir les nouvelles croyances de l'agent.

Définition 6 ***Révision de (M, w_0) par φ pour l'agent a.*** *Soient $(M, w_0) = (\langle W, R, V\rangle, w_0)$ un modèle KD45$_n$, φ une formule objective définie ($\varphi \in L_0$), et $\circ$ un opérateur de révision AGM. Nous définissons la révision privée de (M, w_0) par φ pour l'agent a (avec l'opérateur de révision $\circ$) comme $(M, w_0) \star_a^\circ \varphi = (\langle W', R', V'\rangle, w_0')$, tel que :*

— *si $R_a(w_0) \cap \|\varphi\|_M \neq \emptyset$*
  - *alors $E = \{V(w) \mid w \in R_a(w_0) \cap \|\varphi\|_M\}$*
  - *sinon $E = \{e \mid e \subseteq P$ et $e \models O_a^{(M,w_0)} \circ \varphi\}$*

— *$W' = W \cup W^\varphi \cup \{w_0'\}$ où*
  - *$W^\varphi = \bigcup_{w \in R_a(w_0)} W_w^\varphi$*
  - *$W_w^\varphi = \bigcup_{e \in E} \{v_w^e\}$*

— *$R_a' = R_a \cup R_a^\varphi \cup R_a^0$ où*
  - *$R_a^\varphi = \{(w_1^\varphi, w_2^\varphi) | w_1^\varphi, w_2^\varphi \in W^\varphi\}$*
  - *$R_a^0 = \{(w_0', w^\varphi) | w^\varphi \in W^\varphi\}$*

— *$R_i' = R_i \cup R_i^{\overrightarrow{\varphi}} \cup R_i^0$ pour $i \neq a$, où*
  - *$R_i^{\overrightarrow{\varphi}} = \{(v_w^e, w') | wR_iw', v_w^e \in W^\varphi\}$ pour $i \neq a$*
  - *$R_i^0 = \{(w_0', w) | (w_0, w) \in R_i\}$ pour $i \neq a$*

— *$V'(w) = V(w)$ pour $w \in W$*

— *$V'(v_w^e) = e$ pour $v_w^e \in W^\varphi$*

— *$V'(w_0') = V(w_0)$*

La construction du modèle révisé est similaire à la construction du modèle discuté pour l'expansion. Seul le nouvel ensemble de mondes W^φ est différent : si la nouvelle information φ est possible pour l'agent a, il effectue une expansion, sinon, les mondes du nouvel ensemble W^φ ont pour valuation un modèle (propositionnel) de la nouvelle information φ.

Montrons maintenant que ces opérateurs présentent de bonnes propriétés logiques :

Proposition 6 *L'opérateur $\star$ satisfait (R_n0)–(R_n9).*

Illustrons à présent le comportement de ces opérateurs de révision privée sur un exemple simple.

Example 2 *Considérons le modèle de la figure 3, où l'agent 1 croit $\neg x \wedge \neg y$ et que l'agent 2 croit $x \wedge y$. L'agent 2 croit $x \wedge y$ et que l'agent 1 croit $x \Leftrightarrow y$.*

Après la révision par $x \wedge y$, l'agent 1 doit croire $x \wedge y$ et les croyances de l'agent 2 doivent rester inchangées. Le modèle obtenu est donné dans la figure 4. Dans cet

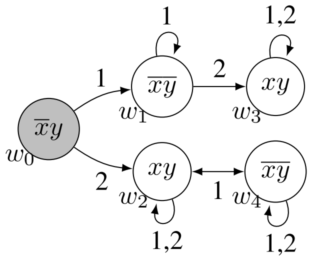

FIGURE 3 – (M_1, w_0)

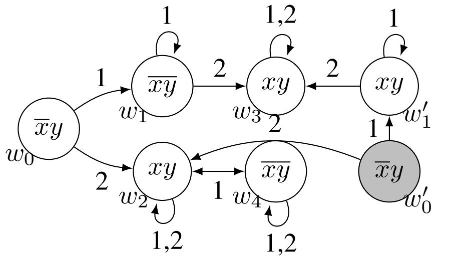

FIGURE 4 – $(M_1, w_0) \star_1 (x \wedge y)$

exemple, l'agent 1 *utilise l'opérateur de révision AGM de Dalal.*

Nous pouvons observer sur cet exemple que le modèle révisé (M', w'_0) *obtenu en utilisant la définition 6 peut ne pas être minimal (la même chose arrive pour les modèles étendus obtenus à l'aide de la définition 5). Néanmoins, un modèle minimal peut être obtenu par bisimulation. Sur cet exemple, cela conduit au modèle décrit à la figure 5.*

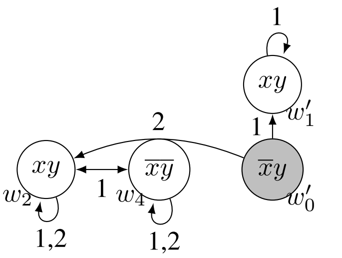

FIGURE 5 – $(M', w'_0) \leftrightarrows (M_1, w_0) \star_1 (x \wedge y)$

Comme pour l'expansion, nous pouvons aussi définir un modèle produit qui effectue le révision. Mais ici, nous utilisons des modèles d'événements avec assignements [25]. Ces derniers sont des structures de la forme $\langle S, T, \mathrm{pre}, \mathrm{pos}\rangle$, où S, T et pre sont définis comme précédemment et $\mathrm{pos} : S \to (P \to \{\top, \bot\})$ est une fonction qui retourne, pour chaque événement possible s, sa post-condition $\mathrm{pos}(s)$. Les post-conditions sont des affectations de variables propositionnelles à $\top$ ou $\bot$. Ainsi, pos est utilisée pour réinitialiser les valuations après l'exécution des événements. Le produit de (M, w) par (N, s) est le nouveau modèle pointé $(M^N, w.s)$, où M^N, W^N et R^N sont définis comme précédemment et la nouvelle valuation est $V^N(w) = \{p \mid \mathrm{pos}(w)(p) = \top\}$.

Le modèle d'événement pointé qui effectue la révision est $(N^{\star_a}, s_0)$, où $N^{\star_a} = \langle S, T, \mathrm{pre}, \mathrm{pos}\rangle$ tel que :

— $S = \{s_0, s_\top\} \cup \{s^e_w \mid v^e_w \in W^\varphi\}$

— $T_a = \{(s_0, s^e_w) \mid v^e_w \in W^\varphi\} \cup \{(s^{e_1}_{w_1}, s^{e_2}_{w_2}) \mid v^{e_1}_{w_1}, v^{e_2}_{w_2} \in W^\varphi\} \cup \{(s_\top, s_\top)\}$

— $T_i = \{(s_0, s_\top), (s_\top, s_\top)\} \cup \{(s^e_w, s_\top) \mid v^e_w \in W^\varphi\}$, pour $i \neq a$

— $\mathrm{pre}(s_0) = \bigwedge_{p \in V(w_0)} p \wedge \bigwedge_{p \in P \setminus V(w_0)} \neg p$

— $\mathrm{pre}(s^e_w) = \bigwedge_{p \in V(w)} p \wedge \bigwedge_{p \in P \setminus V(w)} \neg p$

— $\mathrm{pre}(s_\top) = \top$

— $\mathrm{pos}(s_0) = \emptyset$

— $\mathrm{pos}(s^e_w)(p) = \begin{cases} \top, & \text{si } e \models p \\ \bot, & \text{si } e \not\models p \end{cases}$

— $\mathrm{pos}(s_\top) = \emptyset$

Le modèle d'événements ici est quelque peu semblable à celui de l'expansion. La différence est que l'événement possible s_φ est remplacé par une clique d'événements possibles s^e_w. Il n'est pas difficile de voir que chaque monde possible $w \in R_a(w_0)$ est remplacé par un ensemble de mondes possibles $w.s^e_w$, pour $e \in E$, avec une nouvelle valuation satisfaisant φ dans le modèle résultant. Une preuve que $((M, w_0) \star_a \varphi) \leftrightarrows (M^{N^{\star_a}}, w_0.s_0)$ peut être obtenue de manière similaire au cas de l'expansion.

7 TRAVAUX CONNEXES

Comme expliqué dans l'introduction, il existe quelques travaux sur les liens entre les logiques épistémiques et la théorie du changement de croyances, mais la plupart d'entre eux étudient la façon d'encoder les opérateurs de changement de croyances dans un modèle épistémique [13, 7, 11, 23], en utilisant les relations d'accessibilité pour coder les différents niveaux de plausibilité des croyances de l'agent. Donc fondamentalement, le problème est d'essayer d'effectuer la révision de croyances dans le modèle épistémique.

À l'inverse, nous étudions dans ce travail comment effectuer la révision (et l'expansion) de croyances dans un modèle KD45$_n$, représentant les croyances d'un groupe d'agents. Dans [22] Tallon, Vergnaud et Zamir étudient ce qu'ils appellent la révision des modèles KD45$_n$ due à la communication entre les agents : certains agents annoncent publiquement (une partie de) leurs croyances. Leur modèle est plus proche de l'expansion que de la véritable révision, et ne concerne que les croyances subjectives.

Dans [18] Herzig, Lang et Marquis étudient la progression dans les structures de croyances multi-agents. Leur travail porte principalement sur les effets des actions à l'aide de la mise à jour, mais ils mentionnent brièvement le problème de la révision par des formules objectives. Leur construction est liée à celle que nous proposons, mais ils n'ont pas étudié les propriétés des opérateurs qu'ils proposent.

Enfin, le travail le plus proche du nôtre est certainement l'étude de l'expansion et de la révision privée faite par Aucher [3, 2]. La différence est que Aucher considère un modèle interne du problème, c'est-à-dire un modèle de la situation du point de vue de chaque agent, de sorte qu'il n'utilise pas un modèle KD45$_n$ pour modéliser le système, mais un modèle interne par agent. Il utilise une notion de mondes possibles multi-agents afin de calculer le résultat de la révision, ainsi le résultat de la révision est un ensemble de mondes multi-agents, alors que dans ce travail, nous travaillons avec des modèles KD45$_n$ et nous obtenons un unique modèle KD45$_n$ résultant de la révision.

Il est facile de définir une traduction entre les modèles internes et les modèles KD45$_n$, donc nous pouvons étudier les liens entre les opérateurs d'expansion et de révision que nous proposons et ceux proposés (sur les modèles internes) dans [3, 2]. En ce qui concerne l'expansion, il s'avère que les deux opérations sont équivalentes (ce qui n'est pas surprenant puisque nous avons prouvé qu'il existe un seul opérateur d'expansion rationnel). Tout d'abord, notons qu'il est possible d'obtenir un modèle interne I_M pour l'agent $a \in N$ à partir de tout modèle KD45$_n$ (M, w_0). En effet, il suffit de considérer l'ensemble formé des modèles (M^k, w^k) générés à partir de chaque w^k tel que $w^k \in R_a(w_0)$. De même, il est possible d'obtenir un modèle d'événements interne $I_{N^{+a}}$ pour l'agent $a \in A$ à partir du modèle d'événements (N^{+a}, s_0). Maintenant, il est facile de voir que le modèle interne pour a obtenu à partir du produit de (M, w_0) par (N^{+a}, s_0) est le même que le produit de I_M par $I_{N^{+a}}$. En ce qui concerne la révision, la situation est différente. Aucher permet la révision par des formules subjectives et calcule des distances entre les modèles (épistémiques) correspondants. Nous nous intéressons dans ce travail uniquement à la révision par des formules objectives. Et dans ce cas particulier, la révision de Aucher ne permet pas à l'agent concerné par la révision privée de choisir parmi les modèles de la formule objective, ceux qui sont les plus plausibles. Nous pouvons le faire grâce aux opérateurs AGM sous-jacents à la définition de l'opérateur de révision privée. Donc, le résultat de la révision privée au sens de notre article implique (parfois strictement) le résultat donné par la révision de Aucher.

8 CONCLUSION

Dans cet article, nous avons étudié le problème du changement de croyances dans un contexte multi-agents. Nous avons étudié plus précisément l'expansion et la révision privée de modèles KD45$_n$ par des formules objectives. Nous avons proposé un ensemble de postulats pour l'expansion et la révision proche des postulats AGM classiques pour le cas d'un agent unique. Nous avons proposé également la définition des opérateurs particuliers d'expansion et de révision et montré qu'ils satisfont les propriétés recherchées.

Dans le futur, nour prévoyons différentes extensions à ce travail.

La première consiste à examiner le problème du changement privé par des formules subjectives. Pour l'expansion, le méthode sera assez semblable à celle que nous avons décrit ici pour les formules objectives. Mais pour la révision, le cas des formules subjectives est à la fois plus complexe et plus riche que la révision par des formules objectives, en raison de l'exigence de la minimalité du changement. En fait, certaines mesures intéressantes entre modèles de Kripke peuvent être définies et utilisées pour définir un changement minimal pour la révision.

Une autre extension que nous voulons aborder est le changement de groupe. L'idée est que la nouvelle information n'est pas donnée en privé à un seul agent, mais à un groupe d'agents. Ce cas comprend changement privé et changement public comme des cas particuliers. Il est donc clairement plus général. L'interaction entre les agents ajoute des problèmes intéressants supplémentaires, car chaque agent du groupe devra réviser ses croyances sur les croyances des autres agents du groupe qui ont reçu la même information.

Références

[1] C. E. Alchourrón, P. Gärdenfors, and D. Makinson. On the logic of theory change : Partial meet contraction and revision functions. *Journal of Symbolic Logic*, 50 :510–530, 1985.

[2] Guillaume Aucher. *Perspectives on belief and change*. PhD thesis, Université Paul Sabatier - Toulouse III ; University of Otago, 2008.

[3] Guillaume Aucher. Generalizing AGM to a multi-agent setting. *Logic Journal of the IGPL*, 18(4) :530–558, 2010.

[4] Guillaume Aucher. Private announcement and belief expansion : an internal perspective. *Journal of Logic and Computation*, 22(3) :451–479, 2012.

[5] Robert J. Aumann. Agreeing to disagree. *The Annals of Statistics*, 4(6) :1236–1239, 1976.

[6] Robert J. Aumann. Interactive epistemology I : Knowledge. *International Journal of Game Theory*, 28(3) :263–300, 1999.

[7] A. Baltag and S. Smets. Dynamic belief revision over multi-agent plausibility models. In *Proceedings of the 7th Conference on Logic and the Foundations of Game and Decision (LOFT'06)*, pages 11–24, 2006.

[8] Alexandru Baltag and Lawrence S. Moss. Logics for epistemic programs. *Synthese*, 139 :165–224, 2004. Knowledge, Rationality & Action 1–60, 2004.

[9] Alexandru Baltag, Lawrence S. Moss, and Slawomir Solecki. The logic of common knowledge, public announcements and private suspicions. In *Proceedings of the 7th Conference on Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge (TARK 1998)*, pages 43–56, 1998.

[10] Patrick Blackburn, Johan F. A. K. van Benthem, and Frank Wolter. *Handbook of Modal Logic, Volume 3 (Studies in Logic and Practical Reasoning)*. Elsevier Science Inc., New York, NY, USA, 2006.

[11] Oliver Board. Dynamic interactive epistemology. *Games and Economic Behavior*, 49(1) :49–80, 2004.

[12] Thomas Caridroit, Sébastien Konieczny, Tiago de Lima, and Pierre Marquis. Private expansion and revision in KD45n, 2014. Technical Report. `http://www.cril.fr/~caridroit/PERKD45n.pdf`.

[13] Hans P. van Ditmarsch. Prolegomena to dynamic logic for belief revision. *Synthese*, 147(2) :229–275, 2005.

[14] Ronald Fagin, Joseph Y. Halpern, Yoram Moses, and Moshe Vardi. *Reasoning about Knowledge*. The MIT Press, 1995.

[15] Eduardo L. Fermé and Sven Ove Hansson. AGM 25 years - twenty-five years of research in belief change. *Journal of Philosophical Logic*, 40(2) :295–331, 2011.

[16] P. Gärdenfors. *Knowledge in flux*. MIT Press, 1988.

[17] Adam Grove. Two modellings for theory change. *Journal of Philosophical Logic*, 17 :157–170, 1988.

[18] Andreas Herzig, Jérôme Lang, and Pierre Marquis. Action progression and revision in multiagent belief structures. In *Sixth Workshop on Nonmonotonic Reasoning, Action, and Change (NRAC 2005)*, 2005.

[19] H. Katsuno and A. O. Mendelzon. On the difference between updating a knowledge base and revising it. In *Proceedings of the Second International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'91)*, pages 387–394, 1991.

[20] H. Katsuno and A. O. Mendelzon. Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artificial Intelligence*, 52 :263–294, 1991.

[21] Eric Pacuit and Olivier Roy. Epistemic foundations of game theory. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, to appear.

[22] Jean-Marc Tallon, Jean-Christophe Vergnaud, and Shmuel Zamir. Communication among agents : A way to revise beliefs in KD45 Kripke structures. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 14(4) :477–500, 2004.

[23] Johan van Benthem. Dynamic logic for belief revision. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 14 :2004, 2004.

[24] Johan van Benthem. *Logic in Games*. MIT Press, 2014.

[25] H. P. van Ditmarsch, W. van der Hoek, and B. P. Kooi. Dynamic epistemic logic with assignment. In *Proceedings of the 4th International Conference on Autonomous Agents and Multi-Agent Systems (AAMAS), July 25–29, 2005, Utrecht, The Netherlands*, pages 141–148. ACM, 2005.

[26] Hans van Ditmarsch, Wiebe van der Hoek, and Barteld Kooi. *Dynamic Epistemic Logic*. Springer, 2008.